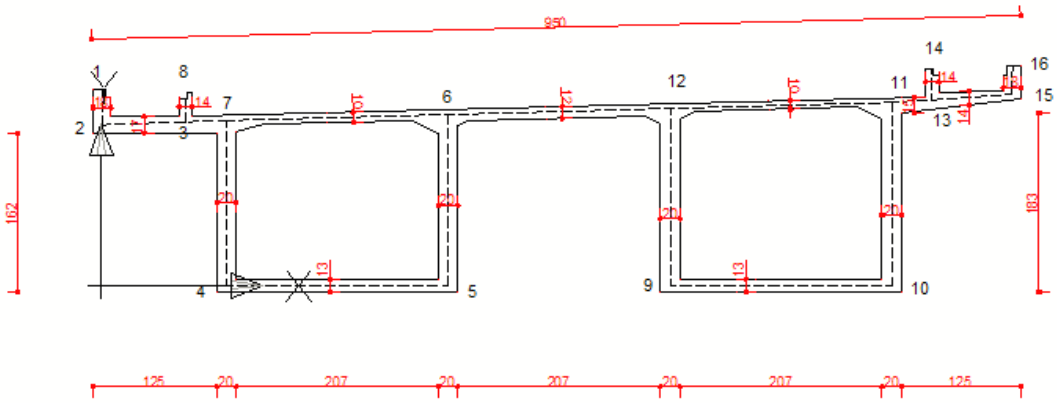
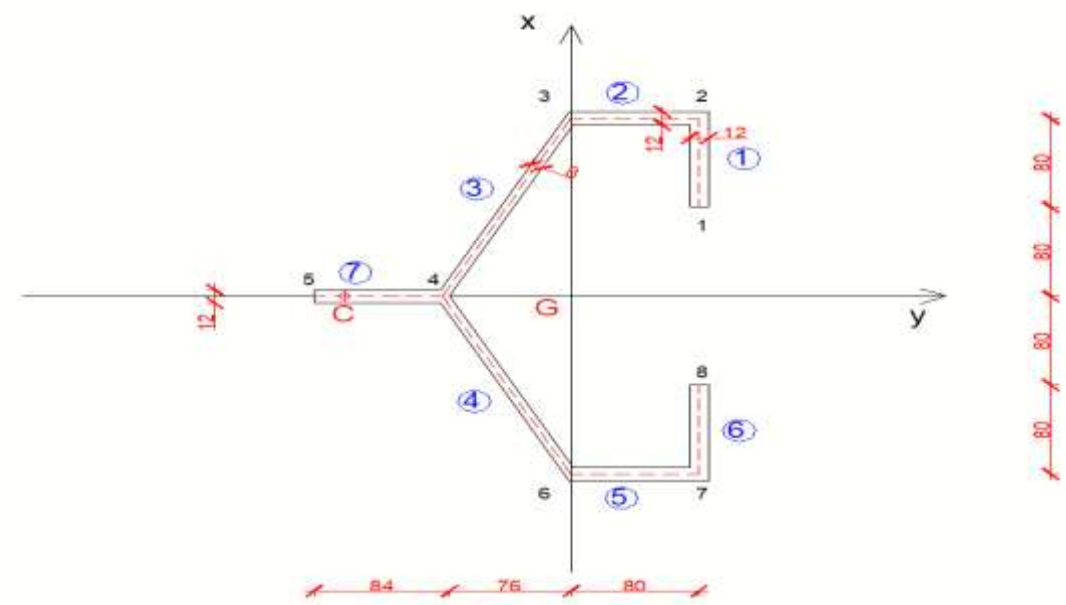
Andrea Pocaterra

CALCOLO DELLE STRUTTURE IN PARETE SOTTILE PROFILI APERTI E CHIUSI

(con software Excel)





INDICE

PREMESSA

CAPITOLO I:

PROPRIETA' MECCANICHE E SETTORIALI DELLA SEZIONE

1.1 INTRODUZIONE
1.2 TRAVI CON SEZIONE RETTA SOTTILE
1.3 CARATTERISTICHE GEOMETRICHE PRINCIPALI
1.4 PROPRIETA' SETTORIALI DI UNA SEZIONE IN PARETE SOTTILE
1.5 FORMULA DI LEIBNITZ PER LE AREE SETTORIALI
1.6 DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE SETTORIALI
1.7 LA DETERMINAZIONE DEI PERCORSI DI FLUSSO
1.8 IL CENTRO DI TAGLIO O DI TORSIONE
1.9 IL METODO MURRAY - ATTARD APPLICATO AD UN PROFILO APERTO A SEZIONE SOTTILE
1.10 ESEMPIO DI CALCOLO DI UNA SEZIONE A PROFILO APERTO
1.11 METODO MURRAY - ATTARD PER UN PROFILO PLURICONNESSO
1.12 ESEMPIO DI CALCOLO DI UN PROFILO PLURICONNESSO
1.13 CALCOLO DEL MOMENTO STATICO DI INGOBBAMENTO S_ω PER UN PROFILO PLURICONNESSO

CAPITOLO II :

SOLLECITAZIONI DI PRESSOFLESSIONE, TORSIONE E TAGLIO NELLE SEZIONI A PARETE SOTTILE

2.1 PRESSOFLESSIONE DEVIATA NELLE STRUTTURE A PARETE SOTTILE
2.2 LA TORSIONE NELLE STRUTTURE PLURICELLULARI A PROFILI SOTTILI
2.3 IL CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI TAGLIANTI NELLE SEZIONI PLURICONNESSE

CAPITOLO III :

LA TORSIONE NON UNIFORME

3.1 LA TORSIONE NON UNIFORME
3.2 CARATTERISTICA BIMOMENTO
3.3 LUNGHEZZA DIMENSIONALE CARATTERISTICA
3.4 RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE GENERALE
3.5 TRAVE APPOGGIATA TORSIONALMENTE E SOLLECITATA DA UN MOMENTO TORCENTE UNIFORME
3.6 INDAGINE DI KOLLBRUNNER E BASLER
3.7 ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA TORSIONE NON UNIFORME PER UN PROFILO IPE
3.8 ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA TORSIONE NON UNIFORME AD UN PROFILO CHIUSO

CAPITOLO IV :

IL PROGRAMMA ALLEGATO Profili aperti - Profili chiusi

4.1 MENU PRINCIPALE
4.2.0 INSERIMENTO DATI NUOVA SEZIONE
4.2.1 INSERIMENTO DATI NUOVA SEZIONE PER UN PROFILO APERTO
4.2.2 INSERIMENTO DATI NUOVA SEZIONE PER UN PROFILO CHIUSO
4.2.3 CARICAMENTO DI UNA SEZIONE GIA' CALCOLATA
4.3 CARICAMENTO DI UNA SEZIONE DI ESEMPIO (DA MANUALI O DAL WEB)
4.4 CARICAMENTO DI UN PROFILO TIPO IPE-IPN-HE-UPN-L
4.5 CARICAMENTO PROFILO DA AUTOCAD
4.6 RISOLUZIONE DI UNA TRAVE A TORSIONE NON UNIFORME
4.7 STAMPA RELAZIONE DI CALCOLO IN WORD
4.8 GRAFICI DELLE SOLLECITAZIONI E DELLE CARATTERISTICHE SETTORIALI
4.9 VALIDAZIONE DEI RISULTATI
4.9.1 VALIDAZIONE PER UNA SEZIONE PRESSOINFLESSA SOGGETTA ANCHE A MOMENTO TORCENTE
4.9.2 VALIDAZIONE PER UNA SEZIONE APERTA TRATTA DA ALEKSANDAR PROKIC
"Computer program for determination of geometrical properties of thin -walled beams with open - close section"
4.9.3 VALIDAZIONE PER UNA SEZIONE CHIUSA TRATTA DA ALEKSANDAR PROKIC
"Computer program for determination of geometrical properties of thin -walled beams with open - close section"
4.10.1 IL CALCOLO APPROSSIMATO DEL MOMENTO TORSIONALE JT
4.10.2 CALCOLO APPROSSIMATO DELLE TENSIONI TORSIONALI

PREMESSA

Il testo tratta dei metodi di risoluzione per il calcolo delle caratteristiche geometriche delle sezioni in parete sottile (area, coordinate del baricentro, moduli elastici e plastici, inerzia) incluse quelle settoriali (coordinate del centro di taglio, funzione di ingobbamento, momento statico e costante di ingobbamento), quest'ultime fondamentali per la valutazione della torsione non uniforme che, in determinate condizioni, genera un aumento delle tensioni normali e tangenziali nella sezione tutt'altro che trascurabile. La verifica della sezione per ogni azione interna è affrontata capitolo per capitolo con spiegazioni ed esempi.
A corredo del libro vengono allegati due fogli "excel" per il calcolo dei profili aperti (Volume I) e chiusi (Volume II).
Un altro foglio elettronico è adottato per il calcolo della torsione non uniforme lungo la trave.
La validazione del software, implementato attraverso i fogli elettronici allegati, è stata condotta attraverso l'esame di un significativo numero di sezioni presenti nella letteratura tecnica.
Preme precisare che quanto contenuto non vuole essere sostitutivo di un testo di Scienza delle Costruzioni, in quanto mancante del rigore che tale disciplina richiede, ma si pone esclusivamente quale strumento introduttivo alle problematiche delle sezioni in parete sottile. Anche i fogli elettronici allegati volutamente "grezzi" e privi di protezione, non hanno pretesa di sostituirsi ai software ad uso professionale attualmente in commercio.
Scopo della presente pubblicazione, e del software allegato, è quindi quello di fornire a studenti e professionisti, un manuale tecnico-conoscitivo per affrontare la progettazione strutturale di elementi con sezioni a pareti sottili

1 PROPRIETA' MECCANICHE E SETTORIALI DELLA SEZIONE

1.1 INTRODUZIONE

È opinione corrente che il calcolo delle strutture in parete sottile sia di competenza delle strutture speciali quali le costruzioni navali e spaziali, le torri, i ponti e come tale appannaggio di tecnici specialisti del settore.
In realtà la quasi totalità delle sezioni adottate in ingegneria riguarda le sezioni in parete sottile: per esempio le strutture IPE/HE, angolari, UPN, tubolari in acciaio comunemente usati nella pratica di ogni giorno, sono a tutti gli effetti sezioni sottili aperte o chiuse. Queste sezioni sono prevalentemente usate dove il problema del peso proprio è determinante e quindi particolarmente adatte in zona sismica.
Le tipologie più note senza entrare nel campo spaziale e marittimo:

- Profili a caldo (HE/IPE etc)
- Profili a freddo di qualsiasi forma
- Lamiere ondulate e grecate
- Paratie
- Coperture di grandi luci ma non solo
- Canali aerei di irrigazione
- Ponti
- Incastellature metalliche e tralicci

Per quanto riguarda i materiali sicuramente l'acciaio è quello più sfruttato tra le strutture in parete sottile, ma molto usato è anche il cemento armato e il cemento armato precompresso e recentemente l'alluminio è in grande espansione.
Pur essendo molto diffuse, grazie anche alla grande riduzione del peso proprio, per contro queste strutture lamentano un'eccessiva sensibilità alle sollecitazioni di torsione e taglio ed ai fenomeni di instabilità, che se non opportunamente considerati, possono portare al collasso della struttura.
Uno dei problemi più rilevanti è costituito dal fatto che lo sfruttamento della forma per creare profili sempre più leggeri, comporta una distribuzione non omogenea della sezione; ne consegue che spesso il centro di taglio della sezione non coincide con il baricentro della sezione stessa a cui sono generalmente applicati i pesi propri, inducendo azioni torcenti di rilevante entità. A complicare l'analisi si evidenzia come la posizione del centro di taglio in una sezione pluricellulare non sia di così immediata individuazione.
Un altro fatto che purtroppo nella pratica comune non è molto conosciuto anche tra i professionisti, è il fenomeno della torsione non uniforme.
Come è noto la teoria di De Saint Venant è valida a rigore solo per le sezioni compatte e già i primi studi su sezione a I di Timoshenko agli inizi del Novecento, mettevano in luce l'esistenza di tensioni normali provocate da torsione nelle ali del profilo praticamente dello stesso ordine di grandezza di quelle flessionali calcolate con la teoria classica.
Negli anni quaranta del secolo scorso Vassili Vlassov con la sua teoria delle AREE SETTORIALI portò un notevole contributo allo studio delle sezioni in parete sottile. All'ipotesi della teoria di De Saint Venant di "conservazione delle sezioni piane" valida per le sezioni di area compatta, Vlassov sostituì l'ipotesi di "perimetro indeformabile" della sezione nel proprio piano, cioè possibilità di ingobbamento ma mantenimento della forma del contorno della sezione ottenibile con l'applicazione di irrigidimenti torsionali nella sezione.
Quando anche gli ingobbamenti della sezione non risultano più costanti lungo la dimensione longitudinale della trave, allora va applicata la teoria della torsione non uniforme che si basa sull'invariabilità del contorno e anche quando questo requisito non risulti soddisfatto, solo una modellazione della trave può dare soddisfacenti risultati di calcolo.

Per l'applicazione pratica della sollecitazione dovuta a torsione non uniforme è necessario conoscere almeno altre tre caratteristiche della sezione funzione della linea media s:

- FUNZIONE DI INGOBBAMENTO ω (s) [L^2]
- MOMENTO STATICO DI INGOBBAMENTO S_ω (s) [L^4]
- COSTANTE DI INGOBBAMENTO I_ω [L^6]

Per esempio per una trave IPE sottoposta a un momento torcente e vincolata con un innesto torsionale che ne impedisca l'ingobbamento, in generale si creano delle tensioni longitudinali proprio dovute all'ingobbamento impedito, valutabili con la seguente formula:

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega}\omega(S)$$

e tensioni tangenziali secondarie per ingobbamento impedito da sommare a quelle primarie per torsione pura:

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega \cdot S_\omega(s)}{t \cdot I_\omega}$$

con B =BI-Momento $\left[FL^2\right]$ (si veda il capitolo dedicato alla torsione non uniforme per la sua valutazione)

T_ω =Momento torsionale da ingobbamento $\left[FL\right]$ (spesso indicato anche con M_ω)

entrambi i termini ricavabili dalla teoria della torsione non uniforme che sarà affrontata nel terzo capitolo.
Per una trave tipo IPE senza considerare per semplicità i raccordi e senza per il momento darne una dimostrazione che sarà affrontata nel capitolo "*1.4 PROPRIETA' SETTORIALI DI UNA SEZIONE IN PARETE SOTTILE",*
se h è l'altezza della trave e b la larghezza delle ali, t_f lo spessore delle ali e t_ω lo spessore dell'anima allora:
d=h-tf

$$\omega = \frac{b}{2}\frac{d}{2}$$

$$S_\omega = \int_0^s \omega dA = \frac{\omega \cdot b \cdot t_f}{4}$$

$$I_\omega = I_y \frac{d^2}{4}$$

1.2 TRAVI CON SEZIONE RETTA SOTTILE

Una trave con pareti sottili è caratterizzata dall'avere l'area concentrata lungo uno o più curve del suo piano. Una sezione sottile è formata da un insieme di segmenti di superficie ognuno dei quali ha una dimensione maggioritaria rispetto all'altra. La perpendicolare alla linea media della sezione in ogni tratto che ha come estremi il contorno della sezione stessa, si chiama corda ed è usualmente indicata con t, δ, s, b, ed è praticamente lo spessore locale di ogni segmento della sezione (Q_1 - Q_2 della figura 1).

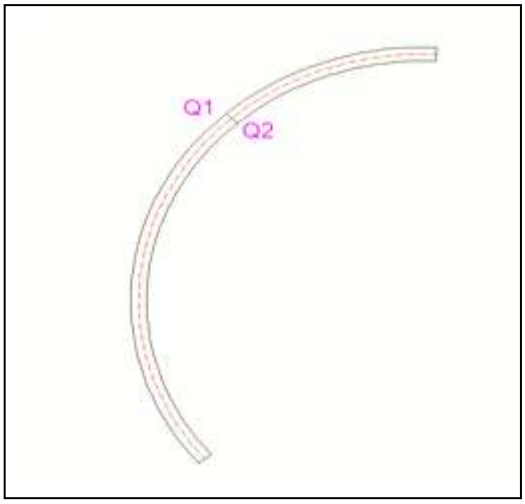


Figura 1

Se indichiamo con Q il punto medio della corda Q_1 Q_2, ebbene sarà la linea media della sezione il luogo dei punti formati da Q.
La base della teoria della trave in parete sottile richiede che $\delta_i/L_i \ll 1$, avendo indicato con δ_i lo spessore e L_i la lunghezza di ogni segmento della sezione. Se L_T è la lunghezza della trave nel senso longitudinale e **d** la dimensione media della sezione, allora dovrà essere $L_T > 10 \cdot d > 10 \cdot \delta_i$.
Si chiamano nodi, il cui numero totale è indicato con n, i punti di diramazione dalla linea media e tratto o segmento una parte dell'area compresa tra 2 nodi. Una maglia o cella, il cui numero totale è indicato con m, è una parte chiusa della linea media che non contenga altri tratti. Si possono avere sezioni aperte con nodi (profili IPE/HE etc) o sezioni chiuse senza nodi (corona circolare).

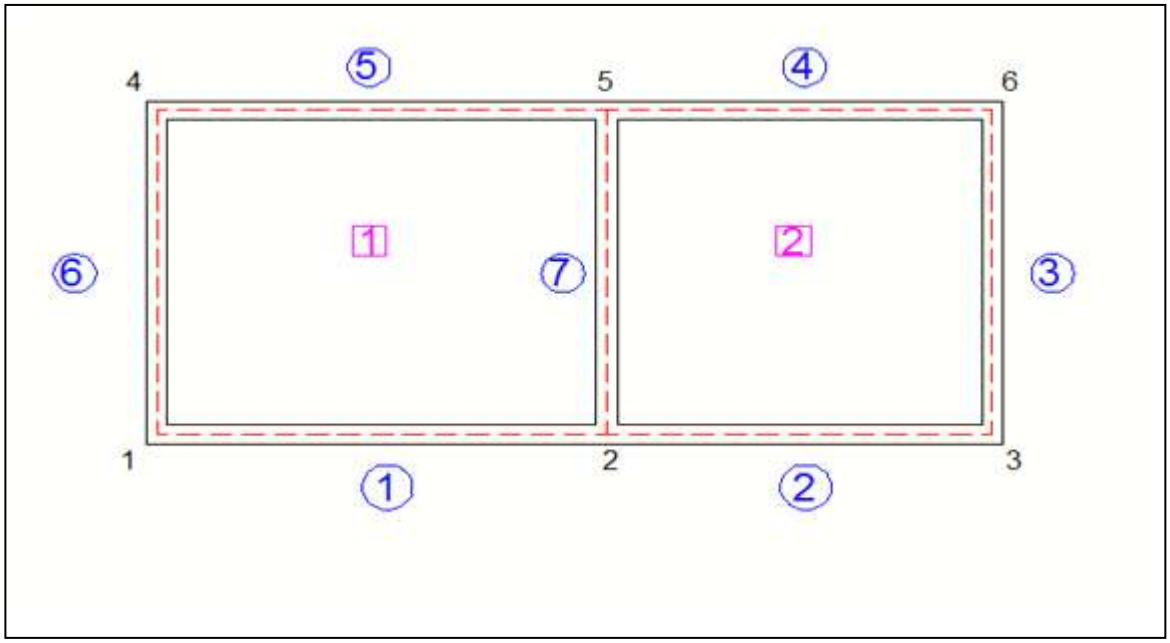


Figura 2

Per la sezione della figura 2 avremo:
m=2 t=7 n=6
risulta sempre $\boxed{m+n=t+1}$

Si definisce c = GRADO DI CONNESSIONE

$$\boxed{c=m+1}$$

Distinguiamo in base al grado di connessione
A SEZIONI MONOCONNESSE (aperte) c=1
B SEZIONI BICONNESSE (chiusa ad una maglia detta anche tubulare) c=2
C SEZIONI MULTICELLULARI O PLURICELLULARI (sezioni chiuse) c >2
Dal punto di vista della definizione, a rigore anche una sezione biconnessa dovrebbe essere considerata una sezione pluriconnessa, ma in pratica è utile mantenere la distinzione in funzione del procedimento di calcolo più semplificato che caratterizza una sezione a singola maglia da quelle a più maglie.
Una ulteriore distinzione riguarda le SEZIONI SOTTILI COMPOSTE O MISTE, cioè formate da celle ed elementi aperti.
Per quanto riguarda flessione e taglio queste sezioni possono seguire il metodo di calcolo generale, mentre per la torsione è utile suddividere il momento torcente tra la rigidezza torsionale della sezione chiusa e quella dei profili aperti.

Detto T = Momento Torcente applicato a tutta la sezione
Ta = Momento Torcente di competenza dei profili aperti
Tc = Momento Torcente di competenza delle sole sezioni chiuse

T = Ta + Tc equilibrio tra il momento torcente dell'intera sezione e quello di competenza dei vari elementi

$$\theta_A = \frac{T_A}{K_A} = \theta_C = \frac{T_C}{K_C} = \frac{T}{K}$$ congruenza della rotazione tra i profili chiusi e aperti

$$T_A = \frac{K_A}{K_A + K_C} \cdot T \qquad T_C = \frac{K_C}{K_A + K_C} \cdot T$$

Nel caso di una sezione ad una maglia ed elementi aperti

$$k_A = G\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i t_i^3}{3}$$

$$k_C = G\frac{\Omega^2}{\sum_{j=1}^{n}\frac{L_j}{t_j}}$$

Essendo Kc >>Ka in prima approssimazione le appendici monoconnesse possono essere trascurate.

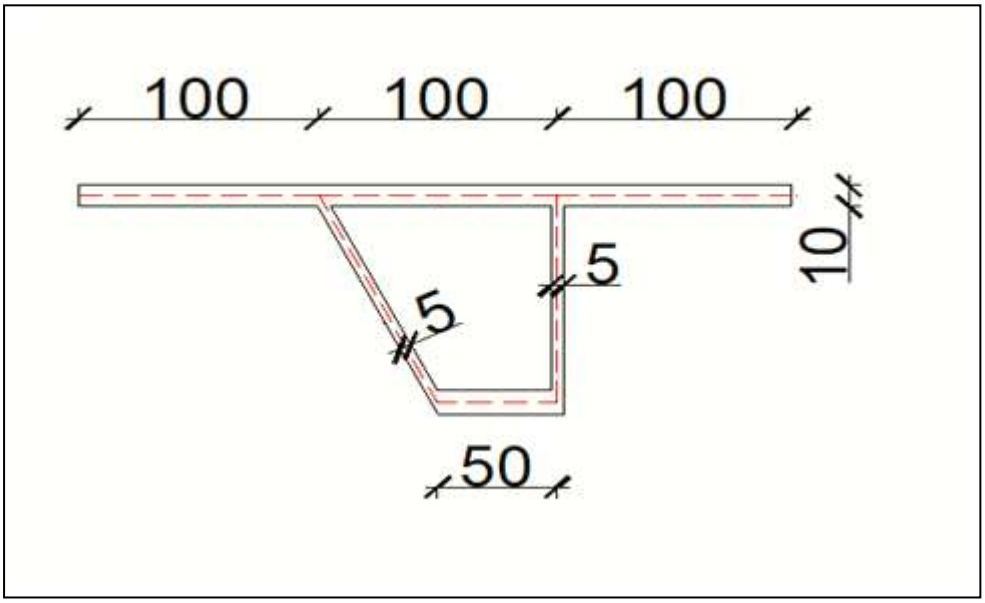


Figura 2.1

Per esempio per la sezione sopra indicata, in prima approssimazione, è lecito calcolare il momento totale come se fosse interamente sopportato dalla sezione chiusa.

1.3 CARATTERISTICHE GEOMETRICHE PRINCIPALI

Le caratteristiche geometriche principali di una sezione formata da più elementi rettangolari sono facilmente calcolabili con le note formule:
L'area della sezione:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot t_i$$

Le coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \overline{x_i} \qquad y_G = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \overline{y_i}$$

con

$$L_i = \sqrt{\left(x_J - x_i\right)^2 + \left(x_j - y_i\right)^2}$$ Lunghezza di ogni segmento

$$\overline{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + x_j\right) \qquad \overline{y_i} = \frac{1}{2}\left(y_i + y_j\right)$$ coordinate del punto medio di ogni tratto

il momento di inerzia torsionale:

$$J_t = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} L_i \cdot t_i^3$$ sezione aperta

con Ω = area media della sezione

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{L_{ki}}{t_{ki}}}$$ sezione chiusa

Nel caso di una sezione composta da più maglie il J_t sarà calcolato al paragrafo relativo alle torsioni della sezione pluriconnessa.
$d_{xi} = x_j - x_i \qquad d_{yi} = y_j - y_i$

$$I_{xg} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_i^2 A_i + \frac{1}{12} d_{yi}^2 A_i\right) - y_g A$$

$$I_{yg} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}_i^2 A_i + \frac{1}{12} d_{xi}^2 A_i\right) - x_g^2 A$$

$$I_{xgyg} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x_i}\,\overline{y_i} A_i + \frac{1}{12} d_{xi} d_{yi} A_i\right) - x_g y_g A_i$$

I momenti principali di inerzia

$$I_{\max},\ I_{\min} = \frac{1}{2}\left(I_{XG} + I_{YG}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{xg} - I_{yg}\right)^2 + 4 I_{xgyg}^{\ 2}}$$

e l'angolo φ di inclinazione rispetto agli assi baricentrici

$$\varphi = \frac{1}{2} arc\tan\left[\frac{2 I_{xgyg}}{\left(I_{yg} - J_{xg}\right)}\right] \qquad \text{se} \qquad I_{xgyg} \neq 0$$

$$\varphi = \pi / 2 \qquad \text{se} \qquad I_{xgyg} = 0 \text{ e } I_{xg} < I_{yg}$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{se} \qquad I_{xgyg} = 0 \text{ e } I_{xg} \geq I_{yg}$$

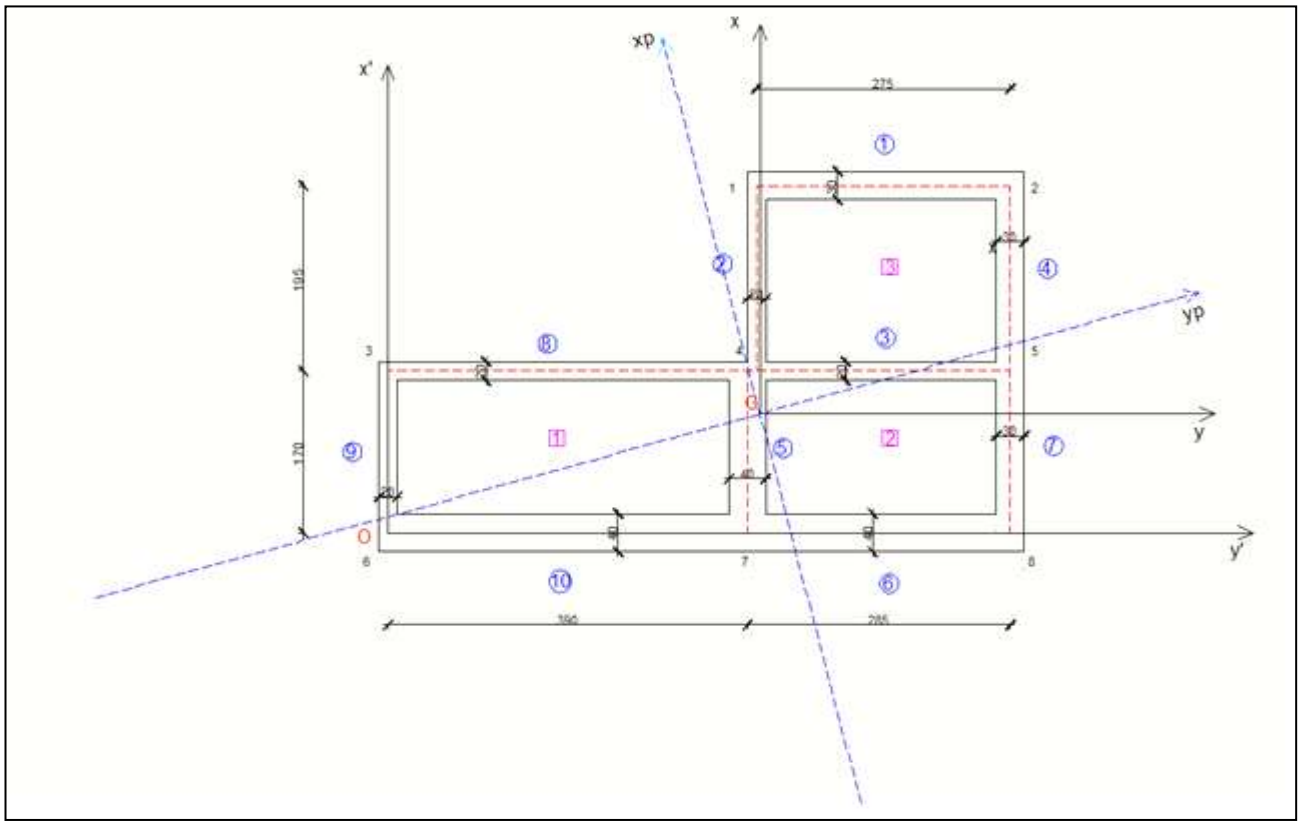


Figura 3

INPUT DATI:
Con riferimento alla figura 3 sopraindicata, il calcolo viene eseguito dal software previo inserimento dei dati relativi alle coordinate dei nodi, alle aste dal nodo iniziale a quello finale, dallo spessore delle aste e dal numero di maglia a cui appartiene ogni asta.
I dati possono essere direttamente ricavati da un disegno AUTOCAD in formato dxf con riconoscimento automatico delle maglie, valido soprattutto in caso di sezioni complesse con molte maglie e molti nodi.

Coordinate dei nodi		
Nodo	X (m)	Y(m)
1	3.900	3.650
2	6.750	3.650
3	0.000	1.700
4	3.900	1.700
5	6.750	1.700
6	0.000	0.000
7	3.900	0.000
8	6.750	0.000

maglia		Tipologia elementi		
num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
3	1	2	1	0.300
3	2	1	4	0.200
2,3	3	4	5	0.200
3	4	5	2	0.300
1,2	5	4	7	0.400
2	6	7	8	0.400
2	7	8	5	0.300
1	8	4	3	0.200
1	9	3	6	0.200
1	10	6	7	0.400

Per la sezione in esame i risultati sono tabulati nella tabella sotto riportata:

Origine nel baricentro					
A =	7.41	m^2	H =	3.650	m
P =	25.35	m	W =	6.750	m
x_G =	4.02	m	S_x^{top}=	5.17	m^3
y_G =	1.26	m	S_x^{bot}=	9.83	m^3
I_x =	12.37	m^4	S_y^{right}=	12.01	m^3
I_y =	32.79	m^4	S_y^{left}=	8.16	m^3
I_{xy} =	6.69	m^4			
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	16.62	gradi	ρ_x =	1.18	m
I_{xp} =	10.37	m^4	ρ_y =	2.17	m^3
I_{yp} =	34.79	m^4	W_{plx}=		m^3
I_p =	38.46	m^4	W_{ply}=		m^3

Per calcolare il modulo plastico della sezione necessario per esempio per EC3, è bene rilevare che l'asse neutro plastico non si trova nel baricentro, bensì ha una posizione tale da dividere la sezione in due parti di uguale area e le cui risultanti sono uguali e pari a fy*A/2. Il braccio della coppia interna si ottiene calcolando la posizione del baricentro delle due metà, utilizzando la definizione di momento statico. Quindi il Wpl vale il prodotto di mezza area per la distanza della coppia interna, ossia la distanza tra i baricentri delle due mezze sezioni di uguale area. Naturalmente se la sezione è simmetrica per esempio rispetto a x, il Wpl è il doppio del momento statico rispetto all'asse.

1.4 PROPRIETA' SETTORIALI DI UNA SEZIONE IN PARETE SOTTILE

Oltre alle proprietà geometriche tipiche flessionali di una sezione quali A, Sx,Sy,Ix,Iy,Ixy, per lo studio ed il calcolo delle sezioni in parete sottili sia aperte che chiuse ad una cella o a più celle, è necessario definire altri parametri:

ω = Area settoriale [L^2]

S_ω = Momento statico settoriale [L^4]

I_ω = Momento di inerzia settoriale [L^6]

ω e S_ω, variano in ogni tratto della sezione mentre $\mathbf{I}_\omega$ ha valore univoco per tutta la sezione.

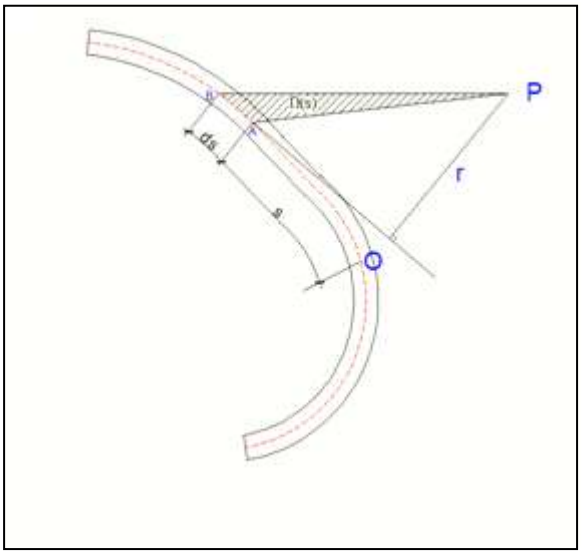


Figura 4

In riferimento alla figura 4, definito un polo P, un punto arbitrario di inizio percorso O, ω = r.ds con r distanza della tangente alla linea media dal punto P, ω è l'area spazzata dal raggio vettore $\overline{PO}$ quando percorre il contorno medio della sezione e il polo P è assunto nel centro di taglio.

$$\omega = \omega(s) = \int_0^s r ds = 2\Omega$$

Come si evince dalla figura 4, ω è il doppio dell'area Ω

$$S_\omega = \int_o^s \omega dA$$

$$I_\omega = \int_o^s \omega^2 dA$$

Se sono noti i valori di ω all'inizio e alla fine di ogni tratto (ω_i ω_j) allora

$$I_\omega = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} L_i t_i \left(\omega_i^2 + \omega_i\omega_j + \omega_j^2\right)$$

Per i profili chiusi si vedrà in seguito che ω dovrà essere corretto con un fattore ψ diverso per ogni cella del profilo.

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{2\Omega}{t \cdot \int_c \frac{ds}{t}} - r(s)$$

Consideriamo un HEA100 (b=100 mm, H=96 mm, d= 88 mm, tf=8 mm, tw=5 mm) e che l'ascissa curvilinea percorra tutta l'ala superiore, poi l'anima e poi l'ala inferiore. Calcoliamo come variano le coordinate x e y in funzione della coordinata s sulla sezione a partire dall'estremo a destra dell'anima superiore. Il sistema di coordinate è centrato nel baricentro della sezione.

$x(s) = s - 5$	nell' ala superiore	per $0 \le s \le 10$
$x(s) = 0$	nell'anima	per $10 \le s \le 18.8$
$x(s) = -s + 23.8$	nell' ala inferiore	per $18.8 \le s \le 28.8$

$y(s) = -4.4$	nell' ala superiore
$y(s) = s - 14.4$	nell'anima
$y(s) = 4.4$	nell' ala inferiore

La funzione di ingobbamento $\omega_G(s)$ risulta essere proporzionale al doppio dell'area settoriale che il raggio vettore con origine nel polo G spazza quando il punto P sulla sezione descrive la linea media del profilato nel verso delle s crescenti a partire dal punto O in cui s=0.

$\omega(s) = x(s) \cdot y(s)$ e facendo i conti:

$\omega(s) = -4.4s + 22$	nell' ala superiore	per $0 \le s \le 10$
$\omega(s) = 0$	nell'anima	per $10 \le s \le 18.8$
$\omega(s) = -4.4s + 104.72$	nell' ala inferiore	per $18.8 \le s \le 28.8$

Si può facilmente constatare che il valore massimo di ω è nell'ala superiore o inferiore per s=0 e vale 22 cm^2 pari a b/2·d/2.

Calcoliamo ora S_ω.

$$S_\omega = \int_0^s \omega(s) \cdot dA = \int_0^s \omega(s) \cdot t \cdot ds$$

Constatando che in ogni tratto la funzione di ingobbamento ω è lineare:

$\omega = \dfrac{\omega_B - \omega_A}{2} \cdot s + \omega_A$ e integrandola nel primo tratto se L è la lunghezza del tratto:

$S_\omega = \dfrac{\omega_B + \omega_A}{2} \cdot L \cdot t$ che assume il valore massimo al centro delle ali $\omega_A = 0$ $\omega_B = \dfrac{b \cdot d}{4}$

$$S_\omega = \frac{\omega_B}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot t_f = \frac{b^2 \cdot d \cdot t_f}{16} \qquad S_\omega = 44 cm^4$$

Esempio: sezione tipo IPE300 senza elementi curvi:

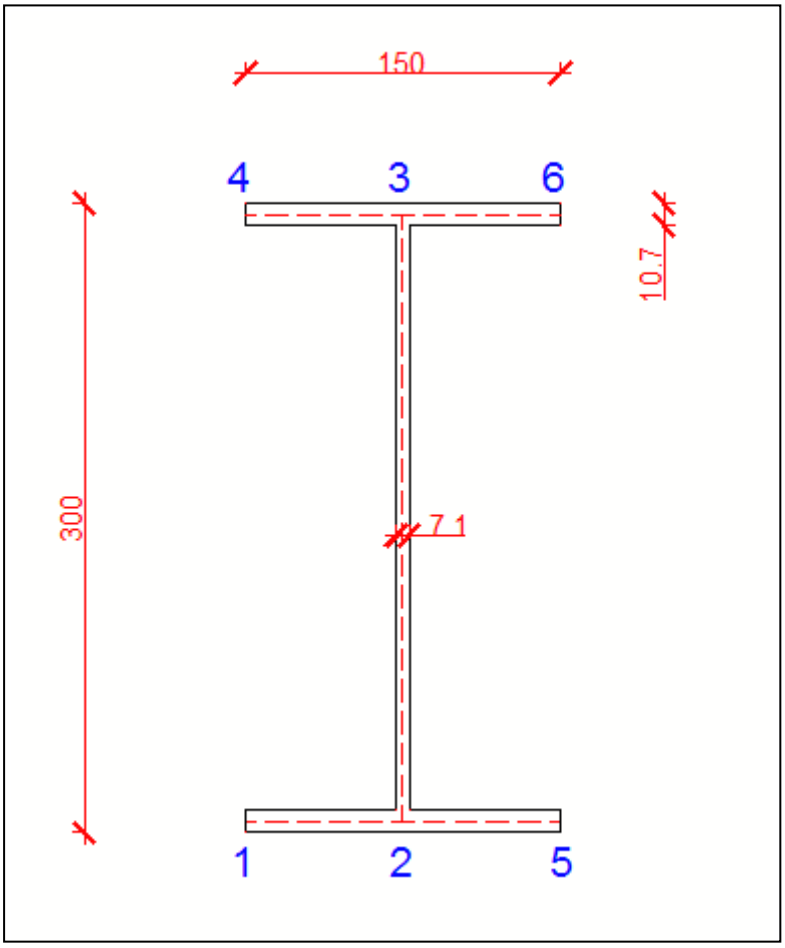


Figura 5

b=15 cm h= 30 cm tf=1.07 cm tw=0.71 cm d=h-tf=28.93 cm

$$\omega = \frac{b}{2} \cdot \frac{d}{2} = 108.49 cm^2$$

$$S_\omega = \int_0^s \omega dA = \frac{\omega \cdot b \cdot t_f}{4} = 455.31 cm^4$$

$$I_\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} L_i \cdot t_i (\omega_i^2 + \omega_i \cdot \omega_j + \omega_j^2)$$

nodo	x (cm)	y (cm)	ω (cmq)
1	0.00	0.00	-108.49
2	7.50	0.00	0.00
3	7.50	28.93	0.00
4	0.00	28.93	108.49
5	15.00	0.00	108.49
6	15.00	28.93	-108.49

asta	nodo i	nodo j	ω_i (cmq)	ω_j (cmq)	L_i (cm)	t_i (cm)	I_ω (cm^6)
1	1	2	-108.49	0.00	7.50	1.07	31483.51
2	2	5	0.00	108.49	7.50	1.07	31483.51
3	2	3	0.00	0.00	28.93	0.71	0.00
4	3	4	0.00	108.49	7.50	1.07	31483.51
5	3	6	0.00	-108.49	7.50	1.07	31483.51
							125934.05

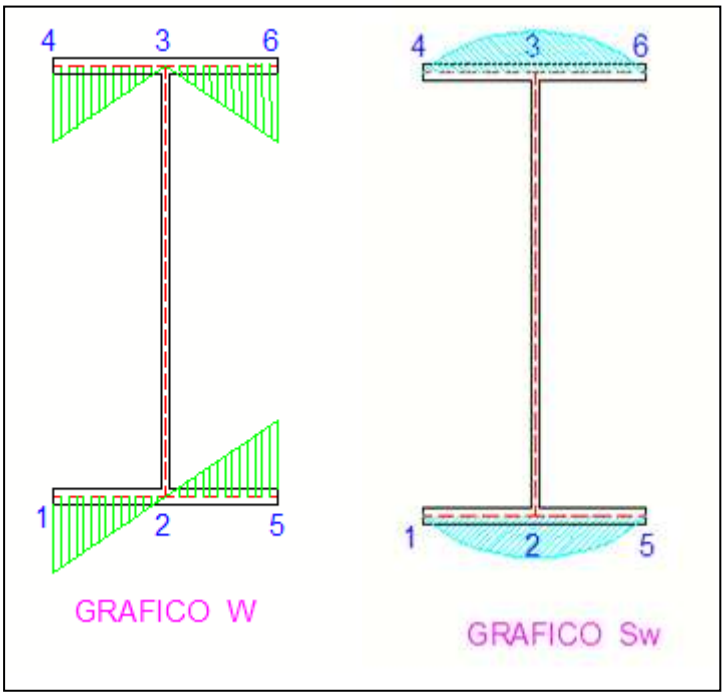
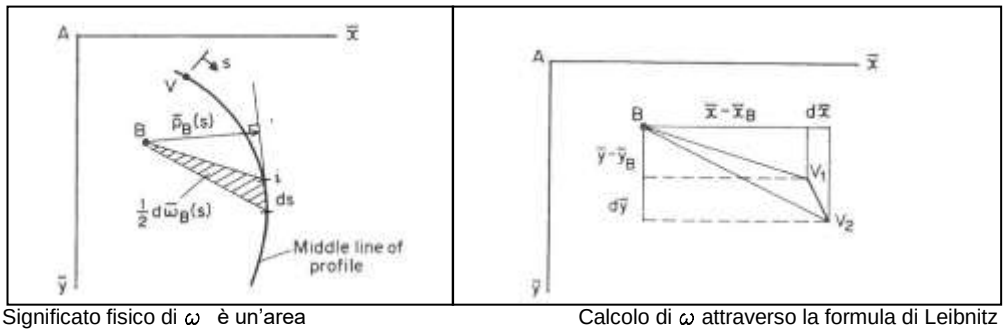


Figura 6

1.5 FORMULA DI LEIBNITZ PER LE AREE SETTORIALI

Per il calcolo automatico delle sezioni sottili di qualsiasi connessione è utile usare la formula di Leibnitz, la cui espressione si ricava dal seguente procedimento. Con riferimento alla figura 7, l'area settoriale ω dipende dal polo B e dal punto V del profilo in cui inizia l'integrazione. Riportando la spiegazione di N. W. Murray " Introducing to the theory of thin-walled structures", (vedi Bibliografia 8) per un elemento infinitesimo di linea media (figura 7)



Significato fisico di ω è un'area — Calcolo di ω attraverso la formula di Leibnitz

Figura 7

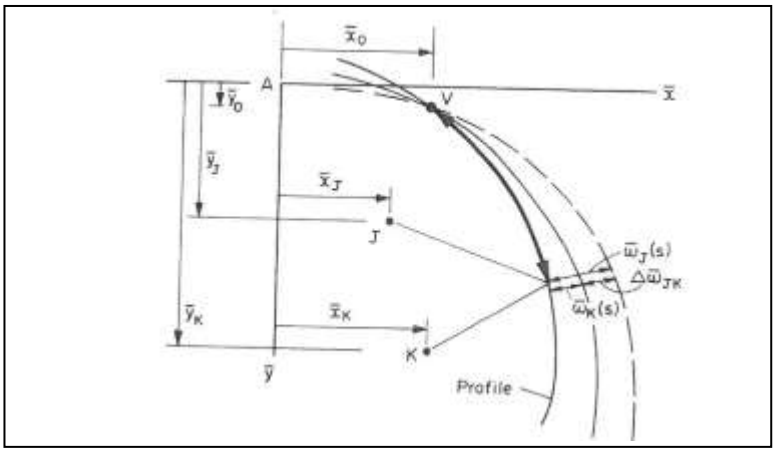
Area $BV_1V_2 = \frac{1}{2}\left[\left(x-x_B\right)+d_x\right]\left[\left(y-y_B\right)+dy\right] - \left(y-y_B+\frac{1}{2}dy\right)dx-\frac{1}{2}\left(x-x_B\right)\left(y-y_B\right)$

Area $BV_1V_2 = -\frac{1}{2}\left[\left(x-x_B\right)+d_x\right]\left[\left(y-y_B\right)+dy\right]+\left(x-x_B+\frac{1}{2}dx\right)dy+\frac{1}{2}\left(x-x_B\right)\left(y-y_B\right)$

ed uguagliando si ottiene

2 AREA BV1V2= $d\omega_B\left(s\right)=\left(x-x_B\right)d_y-\left(y-y_B\right)d_x$

E' comodo avere una formula generale per trasformare la formula di Leibnitz da un polo ad un altro (per esempio dal polo baricentrico al centro di taglio).



Trasformazione della funzione ω da un polo j ad un polo k

Figura 8

Con riferimento alla figura 8 e prendendo 2 poli J e k.

$$d\omega_j(s) = (x - x_j)dy - (y - y_j)dx$$

$$d\omega_k(s) = (x - x_k)dy - (y - y_k)dx$$

$$d\left[\omega_j(s) - \omega_k(s)\right] = (x_k - x_j)dy + (y_j - y_k)dx$$

ed integrando

$$\omega_j(s) = \omega_k(s) + (y_j - y_k)x - (x_j - x_k)y + \Delta\omega_{jk}$$

dove $\Delta\omega_{jk}$ è una costante di integrazione.

Se prendiamo come inizio dell'integrazione il punto $V(x_0.y_0)$ identico per entrambi i poli allora:

$$\Delta\omega_{jk} = -(y_j - y_k)x_0 + (x_j - x_k)y_0$$

e sostituendolo nella formula abbiamo infine

$$\boxed{\omega_j(s) = \omega_k(s) + (y_j - y_k)(x - x_0) - (x_j - x_k)(y - y_0)}$$

che è la formula settoriale di trasformazione di Leibnitz che sarà alla base del metodo diretto per ricavare le proprietà settoriali e il centro di taglio per le sezioni di qualsiasi connessione. Per ogni tratto della sezione se i è il nodo iniziale e k il nodo finale, c il centro di taglio la formula diventa:

$$\omega_k - \omega_i = (x_i - x_c)(y_k - y_i) - (y_i - y_c)(x_k - x_i)$$

1.6 DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE SETTORIALI

Per l'elaborazione delle tensioni tangenziali in ogni tratto e per calcolare il centro di taglio, è necessario conoscere le coordinate settoriali, riferite cioè alla linea media. Supponiamo di avere un tratto inclinato (il caso di tratto verticale ed orizzontale è una particolarità di quanto sotto riportato), segmento che ha un punto iniziale indicato con i e finale con j. Il flusso avrà quindi direzione i-j. Sia G il baricentro della sezione con G (xg;yg).
Siano Lab=L lunghezza del tratto, a e b rispettivamente le proiezioni orizzontali e verticali del segmento, e s/2 la generica distanza del baricentro di s da i sul segmento (figura 9)

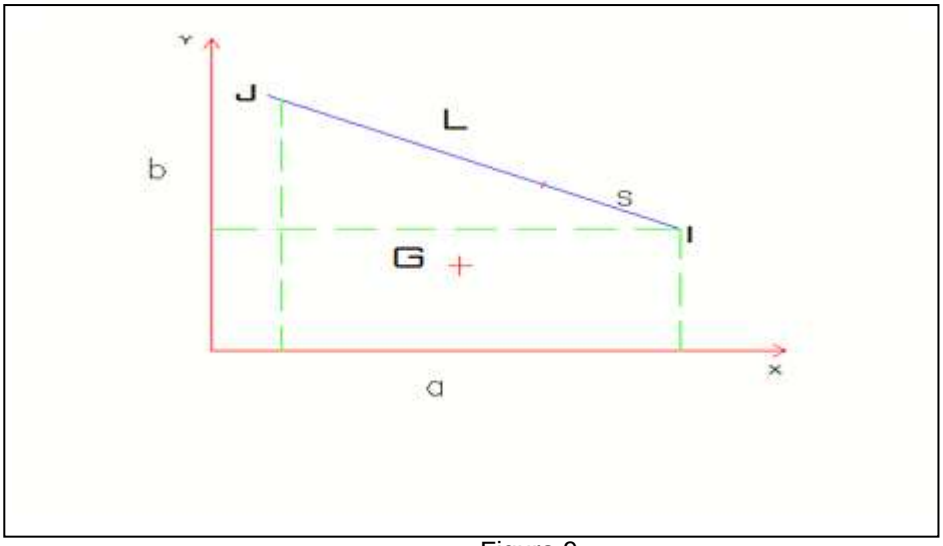


Figura 9

Y(s)=yg+0.5·b/L·s
x(s)=xg+0.5·a/L·s
per ogni tratto della sezione di coordinate iniziali xi,yi e finali xj yj
xi'=xi-xg yi'=yi-yg
xj'=xj-xg yj'=yj-yg
mx=0.5·(xj'-xi')/L qx=xi' c1x=mx·t c2x=qx·t
my=0.5·(yj'-yi')/L qy=yi' c1y=my·t c2y=qy·t
y(s)=my·s+qy x(s)= mx·s+qx

$$Q_x = \int_0^s y(s)dA$$

$$Q_y = \int_0^s x(s)dA$$

dA=t·ds
Qx(s()=c2y·s+c1y·s^2
Qy(s()=c2x·s+c1x·s^2
e indicato con:
ax=(H_x·I_{xy}-V_y·I_y)/B ay=(-H_x·I_x+V_y·I_{yx})/B
α=ax·c1y+ay·c1x β=ax·c2y+ay·c2x
la formula finale per calcolare il flusso
q(s)= $\alpha\cdot s^2+\beta\cdot s$ + qo
con q0 flusso iniziale all'inizio del tratto.
E' quindi noto per ogni tratto la differenza di flusso Δq=q(L)-q0
$\Delta q=\alpha\cdot L^2+\beta\cdot L$
La risultante $F=1/3\cdot\alpha\cdot L^3+0.5\cdot\beta\cdot L^2$

Un esempio (vedi figura 10) su una struttura chiusa chiarirà il procedimento:

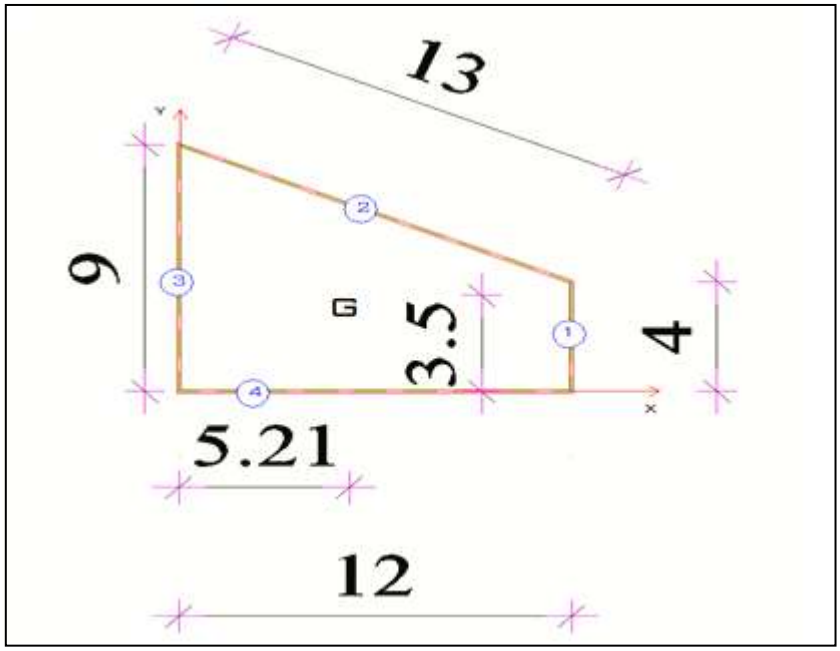


Figura 10

Coordinate delle aste

Asta	xi	yi	xj	yj
1	12.00	0.00	12.00	4.00
2	12.00	4.00	0.00	9.00
3	0.00	9.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	12.00	0.00

Coordinate del baricentro

xg	5.21
yg	3.50

Asta	xi'	yi'	xj'	yj'	L	t
1	6.79	-3.50	6.79	0.50	4.00	0.10
2	6.79	0.50	-5.21	5.50	13.00	0.10
3	-5.21	5.50	-5.21	-3.50	9.00	0.10
4	-5.21	-3.50	6.79	-3.50	12.00	0.10

Asta	mx	qx	my	qy	c1x (s^2)	c2x (s)	c1y (s^2)	c2y (s)	Δq
1	0.00	6.79	0.50	-3.50	0.000	0.679	0.050	-0.350	0.97
2	-0.46	6.79	0.19	0.50	-0.046	0.679	0.019	0.050	-119.02
3	0.00	-5.21	-0.50	5.50	0.000	-0.521	-0.050	0.550	-116.74
4	0.50	-5.21	0.00	-3.50	0.050	-0.521	0.000	-0.350	-0.00

1.7 LA DETERMINAZIONE DEI PERCORSI DI FLUSSO

La valutazione dei percorsi di flusso per una sezione soggetta a taglio è relativamente semplice per un profilo aperto (sezione monoconnessa) o a 2 celle (sezione biconnessa) vedi figura 11, ma diventa non così immediato per una sezione pluricellulare (vedi figura 12).

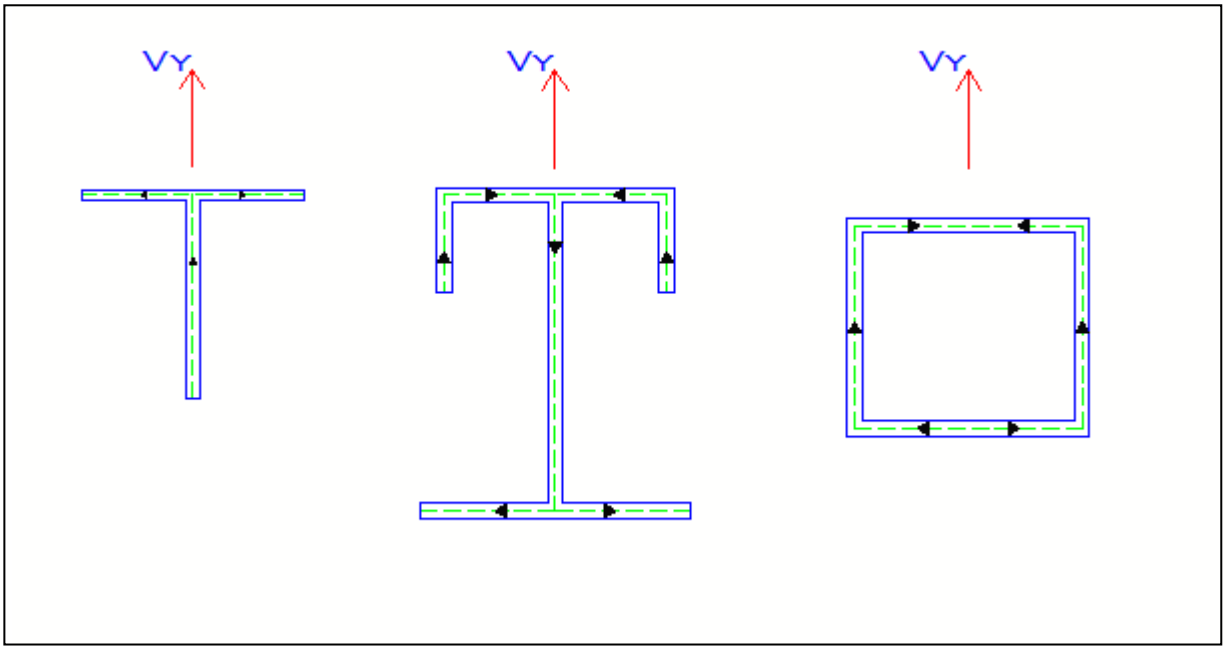


Figura 11

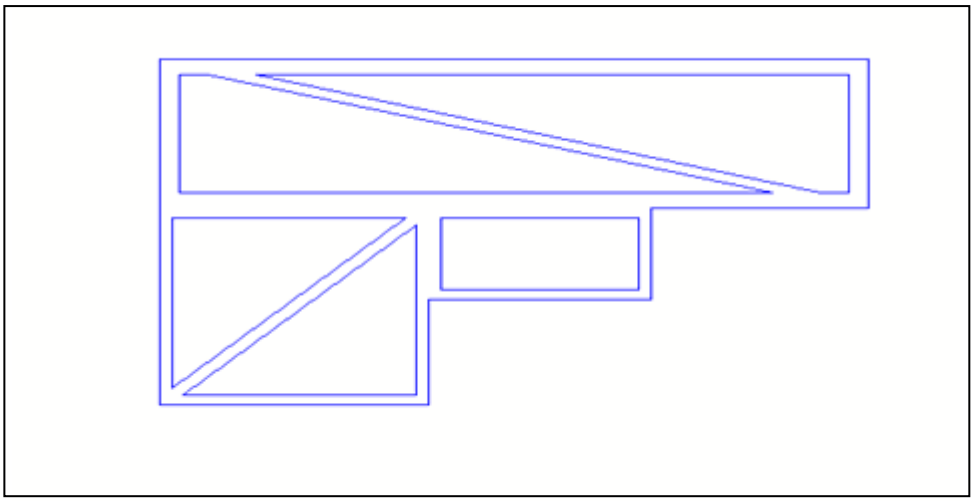


Figura 12

Esistono diversi metodi e programmi di calcolo automatico che individuano il percorso del flusso e tra questi citiamo Alfano–Rosati-Sciarra (1996) (vedi Bibliografia 12), metodo che attraverso un algoritmo sviluppato da Tarjan (1972) sull'uso dei grafi tipo DFS (Depth First Search), automatizza il percorso per il calcolo dei flussi da taglio in ogni braccio della sezione.
Lo scrivente ha preso spunto da "*An algorithm for shear stress evaluationin ship hull girders*" (vedi Bibliografia 25) per l'identificazione dei percorsi in modo automatico con una routine in Visual Basic contenuta nel software Excel Profili chiusi.
In riferimento alla sezione pluricellulare a 2 maglie sotto riportata (figura 13) si procede in questa maniera:

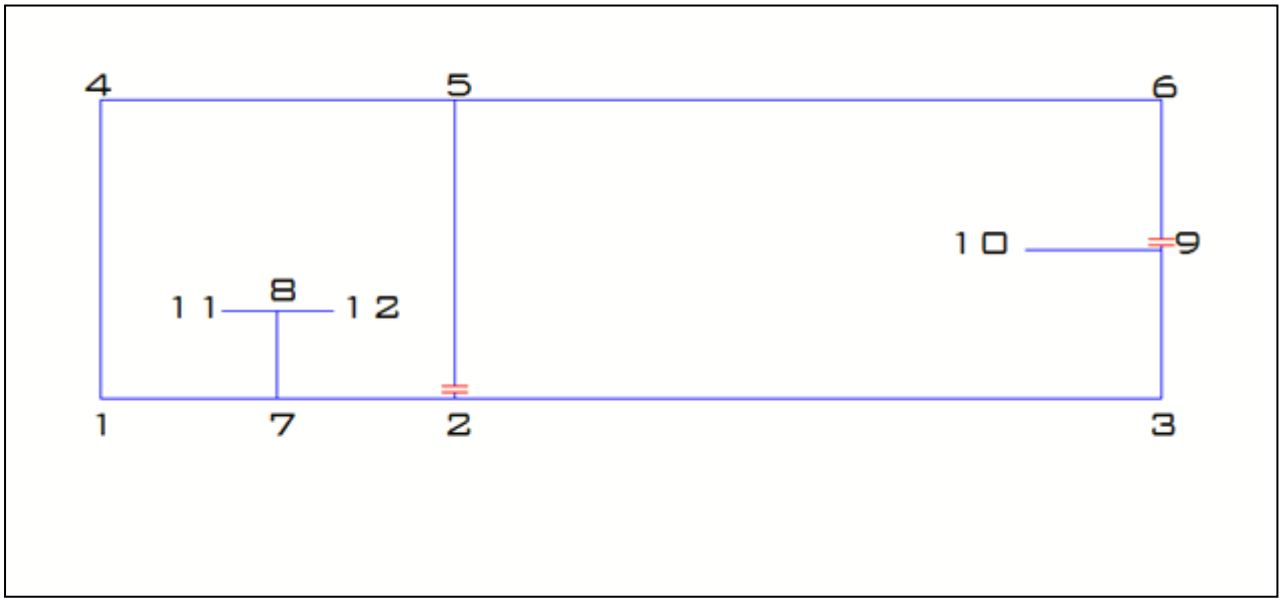


Figura 13

Si rende monoconnessa la sezione con 2 tagli per esempio in prossimità dei nodi 2 e 9.
Si individuano i nodi liberi (F=free): 10-11-12 e 2 e 9 (cuts) ed i nodi dove convergono almeno 3 aste (B=bridge): 5-7-8
Si smonta la sezione attraverso una serie di percorsi (path) così determinati: si parte da un nodo libero qualsiasi per esempio il nodo 10 e si prosegue fino a quando non si incontra un nodo B (bridge):
Path 1: 10-9-3-2-7
Path2: 11-8
Path 3: 12-8
Path4: 9-6-5
Path5: 2-5
Esauriti I nodi liberi si parte dai nodi B(bridge) che hanno il numero più piccolo di aste convergenti non ancora visitate dai percorsi precedenti:
path 6: 5-4-1-7
path 7: 2-5
Se cambiamo la posizione dei tagli (cuts) ovviamente variano sia il numero sia i nodi del percorso, ma il risultato finale in termini di tensione non cambia.
Per esempio se eseguiamo i tagli in prossimità dei nodi 5 e 6 avremo i seguenti percorsi:
6-9 12-8 11-8 10-9 5-4-1-7 6-5-2 9-3-2 8-7

1.8 IL CENTRO DI TAGLIO O DI TORSIONE

È noto che il centro di taglio di una sezione è il punto in cui è applicata la risultante delle tensioni tangenziali agenti, onde per cui se la forza di taglio è applicata in questo punto non ci saranno azioni torcenti.
Quindi se la retta di applicazione del carico agisce sul baricentro della sezione e questo non coincide con il centro di taglio allora insorgeranno azioni torsionali pari a

$$M_T = T_X \cdot d_y + T_Y \cdot d_x$$

Il centro di taglio non dipende dalle sollecitazioni agenti ma è una proprietà della sezione.
Ci sono diversi modi per calcolarlo:

METODO A): Analiticamente attraverso le formule

$$x_c = \frac{\int_c \omega_G(s) \cdot y(s) \cdot t \cdot ds}{I_x}$$

$$y_c = \frac{\int_c \omega_G(s) \cdot x(s) \cdot t \cdot ds}{I_y}$$

dove IX e Iy sono i momenti di inerzia della sezione, ω_G (s) è la funzione di ingobbamento rispetto al baricentro di ogni tratto, x (s) e y(s) sono le coordinate settoriali di ogni tratto e t è il loro spessore.
È evidente che se la sezione possiede 2 assi di simmetria allora il centro di taglio giace all'incrocio di questi e coincide con il baricentro.
Se la sezione possiede un asse di simmetria il centro di taglio giace su questo asse.

METODO B): si calcolano le tensioni tangenziali in ogni tratto prima applicando una forza Tx unitaria e ricavando le risultanti RX di tali forze, poi si trovano le RY applicando Ty= 1.
L'intersezione di queste risultanti o il momento di queste risultanti rispetto al punto origine consente di ricavare le coordinate del centro di taglio.
Esiste un altro metodo molto pratico e facilmente risolvibile con un software semplice tipo Visual Basic di Excel, metodo dovuto a N. W. Murray e M. N. Attard (vedi Bibliografia 8), che consente di ricavare in un'unica soluzione, sia la funzione di ingobbamento ω in ogni nodo e quindi S_ω in ogni tratto, sia le coordinate del centro di taglio.
Anche la costante di ingobbamento I_ω è calcolata conseguentemente noti i valori di ω_i e ω_j nei nodi di ogni tratto.

1.9 IL METODO MURRAY - ATTARD APPLICATO AD UN PROFILO APERTO A SEZIONE SOTTILE

Il metodo indiretto per ottenere in un'unica soluzione le caratteristiche settoriali di una sezione e il centro di taglio, si presta bene ad essere applicato tramite un software semplice quale può essere un foglio di Excel o attraverso il suo linguaggio di programmazione VISUAL BASIC.
Consideriamo un profilo aperto con N numero di aste e nd numero di nodi.
Indichiamo le incognite funzioni di ingobbamento nei nodi con la matrice

$$\{\omega_G\} = \{\omega_1, \omega_2 .....\omega_{nd}\}$$

e per ogni tratto la matrice delle incognite ω_C all'inizio del nodo i e alla fine nel nodo k

$$\{\omega_c\} = \{\omega_{i1}, \omega_{k1}, .\omega_{i2}, \omega_{k2} ....\omega_{i,N}, \omega_{k,N}\}$$

Se ora prendiamo un'asta tipica della sezione con coordinate iniziali (x_i; y_i) e finali (x_k; y_k), lunghezza Ln e spessore tn ed incognite ω_i e ω_k, se assumiamo come polo il centro di taglio di coordinate (x_c ;y_c) per le formule di Liebnitz del capitolo 1.5 potremo scrivere :

$$\omega_k - \omega_i = (x_i - x_c)(y_k - y_i) - (y_i - y_c)(x_k - x_c)$$

e per ogni elemento n della sezione

$$-\omega_{in} + \omega_{kn} + x_c(y_{kn} - y_{in}) - y_c(x_{kn} - x_{in}) = x_{in}(y_{kn} - y_{in}) - y_{in}(x_{kn} - x_{in}) \qquad (1)$$

Le [1) sono un set di N equazioni, una per ogni asta.
Altre 3 equazioni derivano da:

$\int_A \omega dA = 0$ valor medio di ω dell'area A deve essere nullo

e se il polo è localizzato nel centro di taglio alcune proprietà della sezione devono essere nulle:

$$\int_A x\omega dA = 0 \qquad \int_A y\omega dA = 0$$

che corrispondono alle seguenti equazioni in forma discreta:

$$\sum_{i=1}^{N} L_n t_n (\omega_{in} + \omega_{kn}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} L_n t_n \left[\omega_{in}(2x_{in} + x_{kn}) + \omega_{kn}(x_{in} + 2x_{kn})\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} L_n t_n \left[\omega_{in}(2y_{in} + y_{kn}) + \omega_{kn}(y_{in} + 2y_{kn})\right] = 0$$

Abbiamo N+3 equazioni in 2N+2 incognite.
Le equazioni possono essere scritte in forme matriciale

$$[A]\{\omega C\} = [R]$$

$$(N+3)x(2N+2)\cdot(2N+2)x1 = (N+3)x1$$

Per esempio per un profilo a 6 nodi e 5 aste le matrici sono:

$[A]$ $[\omega_c]$

	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10	11	12	
1	-1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_{k1}-y_{11}$	$-(x_{k1}-x_{11})$	ω_{i1}
2	0	0	-1	+1	0	0	0	0	0	0	$y_{k2}-y_{12}$	$-(x_{k2}-x_{12})$	ω_{k1}
3	0	0	0	0	-1	+1	0	0	0	0	$y_{k3}-y_{13}$	$-(x_{k3}-x_{13})$	ω_{i2}
4	0	0	0	0	0	0	-1	+1	0	0	$y_{k4}-y_{14}$	$-(x_{k4}-x_{14})$	ω_{k2}
5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	+1	$y_{k5}-y_{15}$	$-(x_{k5}-x_{15})$	ω_{i3}
6	L_1t_1	L_1t_1	L_2t_2	L_2t_2	L_3t_3	L_3t_3	L_4t_4	L_4t_4	L_5t_5	L_5t_5	0	0	ω_{k3}
7	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5	B_5	0	0	ω_{i4}
8	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4	C_5	D_5	0	0	ω_{k4}
													ω_{i5}
													ω_{k5}
													X_c
													Y_c

$$[R]$$

$$\begin{vmatrix} x_{i1}(y_{k1}-y_{i1})-y_{i1}(x_{k1}-x_{i1}) \\ x_{i2}(y_{k2}-y_{i2})-y_{i2}(x_{k2}-x_{i2}) \\ x_{i3}(y_{k3}-y_{i3})-y_{i3}(x_{k3}-x_{i3}) \\ x_{i4}(y_{k4}-y_{i4})-y_{i4}(x_{k4}-x_{i4}) \\ x_{i5}(y_{k5}-y_{i5})-y_{i5}(x_{k5}-x_{i5}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A_n = L_n t_n (2x_{in} + x_{kn})$$
$$B_n = L_n t_n (x_{in} + 2x_{kn})$$
$$C_n = L_n t_n (2y_{in} + y_{kn})$$
$$D_n = L_n t_n (y_{in} + 2y_{kn})$$

Notiamo che le coordinate del centro di taglio x_C y_C sono incluse tra le incognite.

La matrice $[C]$ è chiamata matrice di connettività e ha dimensioni $(2N+2)$ x $(N+3)$ ed ha valore unitario così costruito:

$\omega_{i1} = \omega_1 \quad \omega_{k1} = \omega_2$ etc

Se moltiplichiamo le 2 matrici $[A]$x$[C]$ otteniamo la matrice $[B]$

$$[A]\{\omega_c\} = [A][C]\{\omega_G\} = [B]\{\omega_G\} = \{R\}$$

e quindi si ottengono le incognite ω di ogni nodo e x_C y_C nei termini della matrice $\{\omega_G\}$

$$\{\omega_G\} = \left[B^{-1}\right]\{R\}$$

con $\left[B^{-1}\right] =$ matrice inversa di $[B]$

Ottenuti i valori di nodo ω si trova immediatamente la costante di ingobbamento con la formula:

$$I_\omega = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} L_n t_n \left(\omega_{in}^2 + \omega_{in}\omega_{kn} + \omega_{kn}^2\right)$$

Un esempio di calcolo chiarirà il procedimento che è più semplice di quanto si pensi.

1.10 ESEMPIO DI CALCOLO DI UNA SEZIONE A PROFILO APERTO

Si esegue il calcolo della sezione nella figura 14 sotto riportata ricavata dal testo "*Esercizi di Scienza delle Costruzioni*" di Zavelani Rossi a pag. 445.

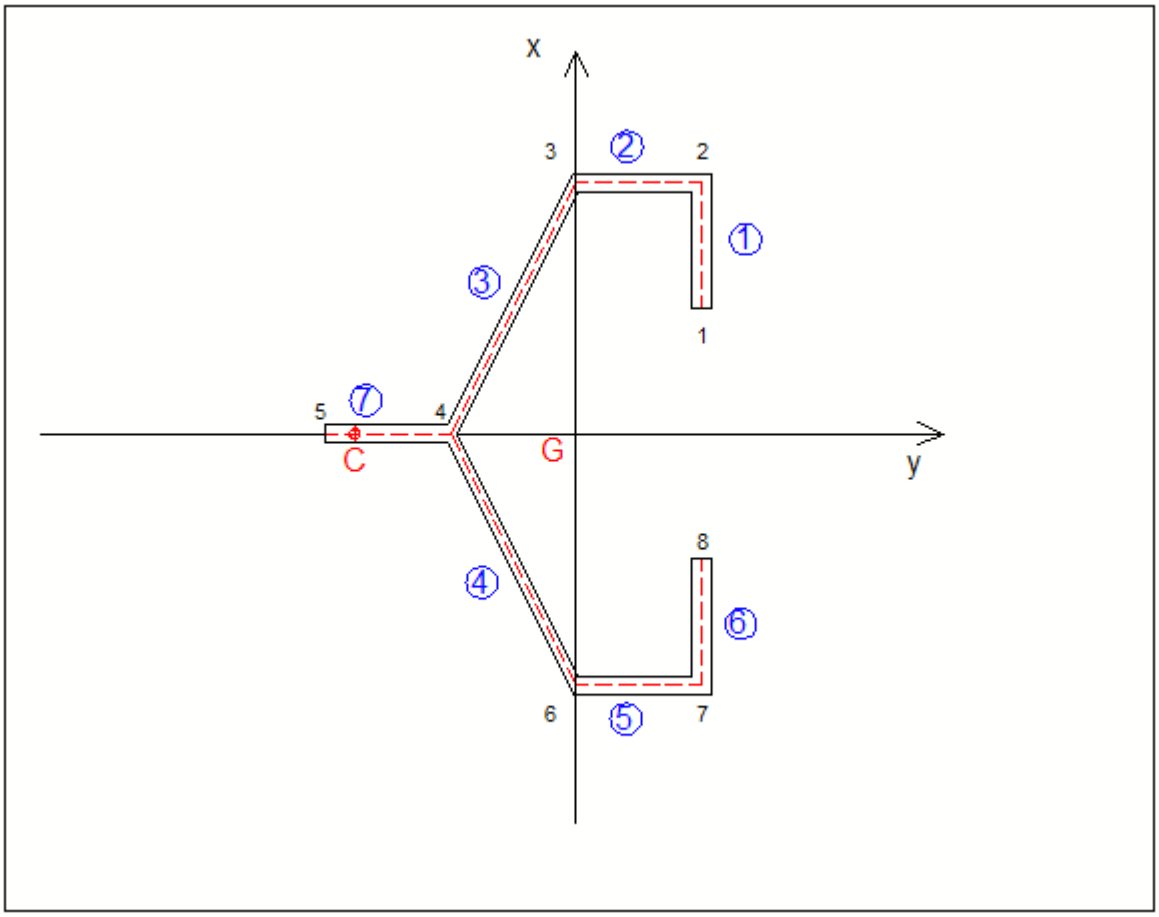


Figura 14

Le coordinate dei nodi e lo spessore delle aste:

Coordinate dei nodi		
Nodo	X (mm)	Y (mm)
1	48.000	40.000
2	48.000	48.000
3	40.000	48.000
4	32.000	32.000
5	24.000	32.000
6	40.000	16.000
7	48.000	16.000
8	48.000	24.000

Tipologia elementi			
Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore (mm)
1	1	2	1.200
2	2	3	1.200
3	3	4	0.800
4	6	4	0.800
5	7	6	1.200
6	8	7	1.200
7	5	4	1.200

La matrice[A]:

Matrice A[10x16]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.00	0.00
2	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	8.00
3	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-16.00	8.00
4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	16.00	8.00
5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0.00	8.00
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-8.00	0.00
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0.00	-8.00
8	9.60	9.60	9.60	9.60	14.31	14.31	14.31	14.31	9.60	9.60	9.60	9.60	9.60	9.60	0.00	0.00
9	1382.40	1382.40	1305.60	1228.80	1602.81	1488.33	1602.81	1488.33	1305.60	1228.80	1382.40	1382.40	768.00	844.80	0.00	0.00
10	1228.80	1305.60	1382.40	1382.40	1831.79	1602.81	915.89	1144.87	460.80	460.80	614.40	537.60	921.60	921.60	0.00	0.00

La matrice[C] di connettività:

Matrice C[16x10]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

La matrice[B] prodotto della matrice [A]x[C]

Matrice B [10x10]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1	1	0	0	0	0	0	0	8.00	0.00
2	0	-1	1	0	0	0	0	0	0.00	8.00
3	0	0	-1	1	0	0	0	0	-16.00	8.00
4	0	0	0	1	0	-1	0	0	16.00	8.00
5	0	0	0	0	0	1	-1	0	0.00	8.00
6	0	0	0	0	0	0	1	-1	-8.00	0.00
7	0	0	0	1	-1	0	0	0	0.00	-8.00
8	9.60	19.20	23.91	38.22	9.60	23.91	19.20	9.60	0.00	0.00
9	1382.40	2688.00	2831.61	3821.45	768.00	2831.61	2688.00	1382.40	0.00	0.00
10	1228.80	2688.00	3214.19	3669.28	921.60	1376.69	998.40	614.40	0.00	0.00

Matrice B^{-1} [10x10]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.81407	-0.43994	-0.17797	0.28197	0.25962	0.10581	-0.07632	-0.04940	0.00036	0.00013
2	0.22599	-0.28971	0.09206	0.01194	0.10939	0.06575	-0.07632	-0.06192	0.00036	0.00026
3	0.14267	0.48812	-0.11621	-0.19633	-0.11277	-0.01757	0.06281	-0.01846	0.00000	0.00026
4	-0.02077	-0.03448	0.13545	0.13545	-0.03448	-0.02077	0.20194	0.05003	-0.00036	0.00000
5	-0.10410	-0.25664	-0.07282	-0.07282	-0.25664	-0.10410	-0.65893	0.09349	-0.00072	0.00000
6	-0.01757	-0.11277	-0.19633	-0.11621	0.48812	0.14267	0.06281	0.03161	0.00000	-0.00026
7	0.06575	0.10939	0.01194	0.09206	-0.28971	0.22599	-0.07632	-0.01184	0.00036	-0.00026
8	0.10581	0.25962	0.28197	-0.17797	-0.43994	-0.81407	-0.07632	-0.02436	0.00036	-0.00013
9	-0.00501	-0.01878	-0.03375	0.03375	0.01878	0.00501	0.00000	0.00156	0.00000	-0.00002
10	0.01042	0.02777	0.02603	0.02603	0.02777	0.01042	-0.01739	-0.00543	0.00005	0.00000

$[\omega] = [B^{-1}] x [R]$

R
384.00
384.00
-256.00
768.00
128.00
-384.00
-256.00
0.00
0.00
0.00

nodo	ω
1	-207.29
2	-30.58
3	97.42
4	0.00
5	0.00
6	-97.42
7	30.58
8	207.29
xc	25.91
yc	32.00

CARATTERISTICHE SETTORIALI DELLA SEZIONE

Coordinata x del centro di taglio rispetto all'origine x_{cO}	25.91	cm
Coordinata y del centro di taglio rispetto all'origine y_{cO}	32.00	cm

rispetto al baricentro x_{cG}	-14.10	cm
rispetto al baricentro y_{cG}	0.00	cm

Funzione di ingobbamento ω_C rispetto a C (warping coordinates)

Nodo	ω_C cm²
1	-207.288
2	-30.575
3	97.425
4	0.000
5	0.000
6	-97.425
7	30.575
8	207.288

Asta	Inizio nodo ω_{Ci}	Nodo finale ω_{Ck}	Nodo finale ω_{Cj}
1	-207.288	-103.644	-30.575
2	-30.575	-15.288	97.425
3	97.425	48.712	0.000
4	-97.425	0.000	0.000
5	30.575	-48.712	-97.425
6	207.288	15.288	30.575
7	0.000	0.000	0.000

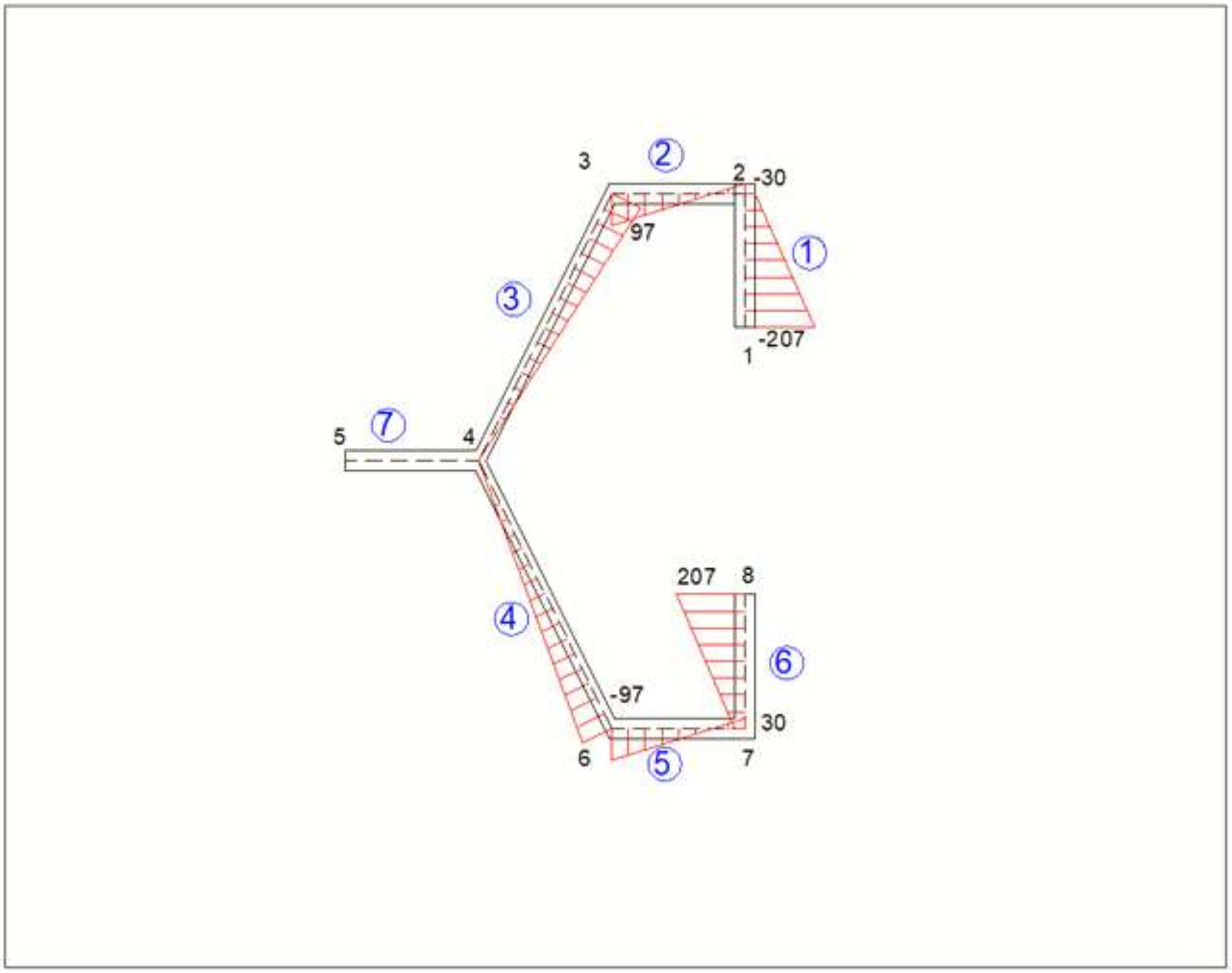


Figura 15

DIAGRAMMA DI ω

Il calcolo di Sw è noto non appena si impongono le equazioni di congruità ai nodi:

$$S_\omega = \int_0^L \omega(s)\cdot t\cdot ds \qquad S_\omega = S_{\omega i} + \Delta S_{\omega i} = \frac{\omega_i + \omega_j}{2} t_i \cdot L_i + S_{\omega i}$$

Momento statico di ingobbamento $S_{\omega c}$

Asta	Inizio nodo $S_{\omega ci}$	Nodo finale $S_{\omega ck}$	Nodo finale $S_{\omega cj}$
1	0.000	-782.926	-1141.742
2	-1141.742	-1134.903	-820.864
3	-820.864	-298.027	-123.749
4	820.864	298.027	123.749
5	1141.742	1134.903	820.864
6	0.000	782.926	1141.742
7	0.000	0.000	0.000

Valori massimi e nulli di $S_{\omega c}$

$S_{\omega cmax}$	x_{max} cm	x_{01} cm	x_{02} cm
-1176.798	1.911		
		12.983	
123.749	17.889	12.983	
1176.798	1.911		

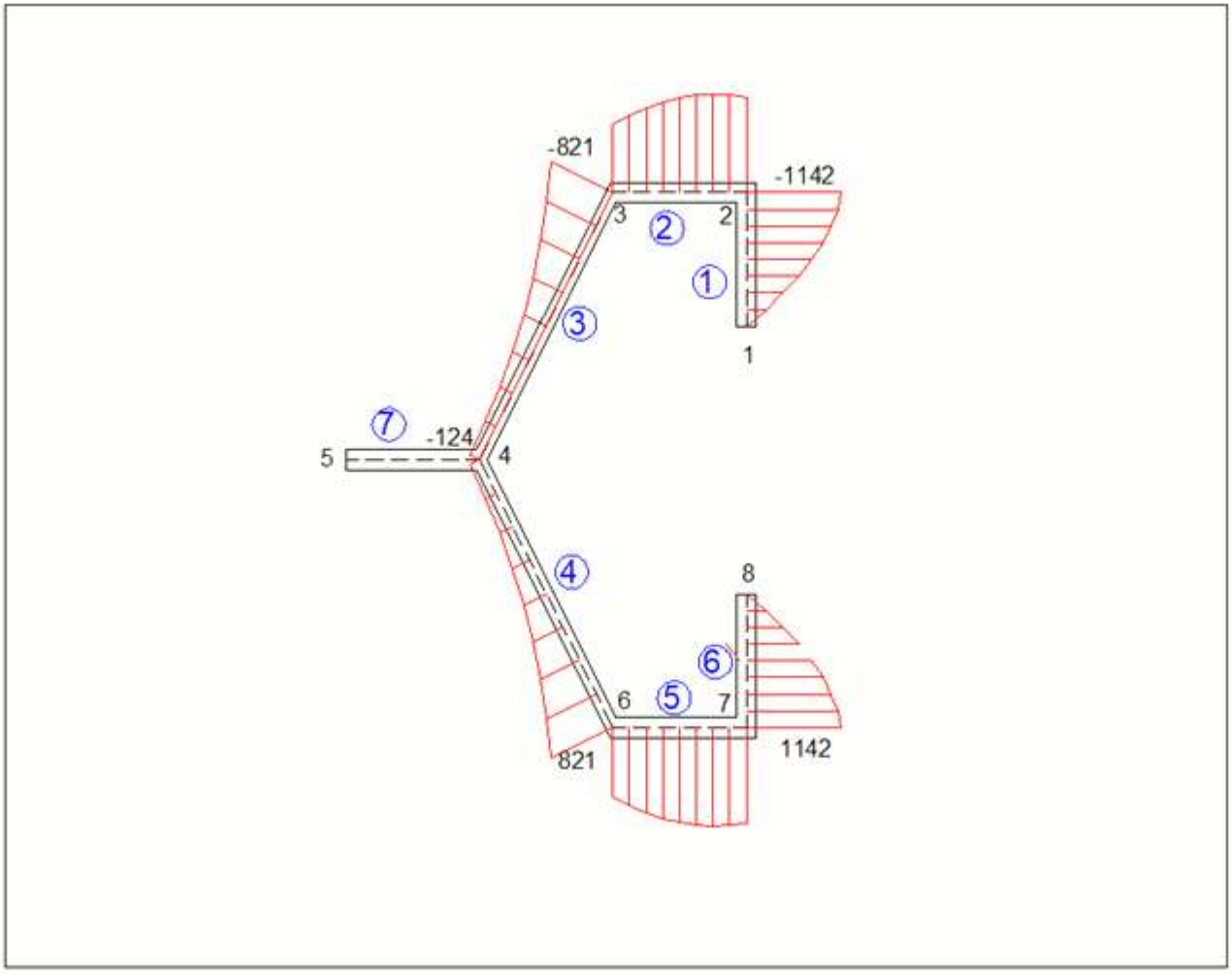


Figura 16

DIAGRAMMA DI Sω

1.11 METODO MURRAY - ATTARD PER UN PROFILO PLURICONNESSO

Quanto detto per le sezioni a profilo aperto continua a valere anche per le sezioni a profilo chiuso con due semplici modifiche:

a) Costante Ψ di cella

Per ogni maglia chiusa è necessario valutare una costante Ψ in modo che la differenza

$$\omega_{kn} - \omega_{in} = \int_0^{Ln} \left(r_n - \frac{\Psi}{t} \right) ds$$

dove r_n è la distanza misurata perpendicolarmente tra il centro di taglio e n-esimo tratto della sezione. L'equazione di Liebnitz del capitolo 1.8 potrà essere scritta:

$$-\omega_{in} + \omega_{kn} + x_c \left(y_{kn} - y_{in} \right) - y_c \left(x_{kn} - x_{in} \right)$$

$$= x_{in} \left(y_{kn} - y_{in} \right) - y_{in} \left(x_{kn} - x_{in} \right) - \Psi \frac{L_n}{t_n}$$

La valutazione di Ψ_j con j= 1;2,.... m maglie è presto fatta non appena viene costruito il sistema

$$\left[D \right] \left\{ \Psi \right\} = 2 \left\{ \Omega \right\}$$

La matrice Ω è composta dall'area di ogni maglia. La matrice $\left[D \right]$ ha come termini (indice non corrispondente alle formule precedenti):

$$d_{i,i} = \sum_{J=1}^{ni} \frac{l_J}{t_J} \qquad d_{i,k} = -\sum_{j_c=1}^{n_{ck}} \frac{l_{jc}}{t_{jc}} \text{ con } i \neq k$$

dove

- ni = numero di elementi di ogni singola cella
- l_J, t_J = lunghezza e spessore di ogni elemento per ogni cella i
- n_{CK} = numero totale degli elementi comuni tra la cella i e la cella K
- l_{JC}, t_{JC} = lunghezza e spessore degli elementi comuni j_C tra la cella i e la cella k

Se abbiamo una sezione biconnessa allora ci sarà solo 1 maglia e

$$\Psi = \frac{2\Omega}{\oint_c \frac{ds}{t}}$$

Per le aste in comune tra 2 maglie di lunghezza L_n e spessore t_n

$$\frac{L_n}{t_n} \left(\Psi_i - \Psi_k \right)$$

b) Eliminazione di un elemento per ogni cella

È necessario eliminare un elemento di ogni cella per rendere la sezione aperta, escludendo le aste comuni tra 2 maglie. La congruenza della sezione è assicurata dai valori Ψ sopra calcolati.
Se le celle sono m avremo m elementi eliminati.

La matrice $\left[A \right]$, indicando come al solito con N il numero di tratti o elementi della sezione e m il numero di maglie, avrà dimensione righe x colonne

$$\left[N - m + 3 \right] x \left[2 \left(N - m \right) + 2 \right]$$

I termini delle ultime 3 righe della matrice $\left[A \right]$ saranno modificati aggiungendo le caratteristiche dell'asta eliminata a quella di contiguità.

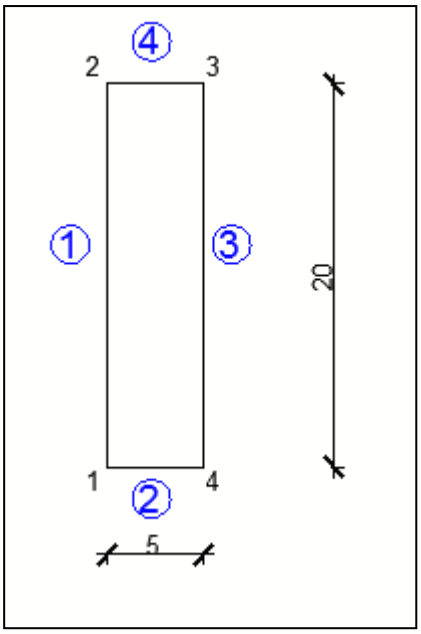


Figura 17

Per esempio se nella sezione biconnessa della figura 17 sopraindicata eliminiamo l'asta 4, la matrice $[A]$ avrà 4-1+3= 6 righe e 2 (4-1)+2 =8 colonne.

Nel caso in cui, per esempio, tutte le aste abbiano spessore unitario, il primo termine dell'asta avrà valore: $L_1 t_1 + L_4 t_4 = 20 + 5 = 25$

L'esempio del paragrafo 1.12 chiarirà il procedimento.

1.12 ESEMPIO DI CALCOLO DI UN PROFILO PLURICONNESSO

Quale esempio di calcolo, si riprende quanto riportato nell'articolo "*A Direct Method of Evaluating the Warping Properties of Thin-Walled Open and Closed Profiles* " di N. W. Murray and M. M. Attard (vedi Bibliografia 8) (figura 18)
Dati di input:
unità di misura in mm
Nodi nd =8 aste N= 10 maglie m=3

L'asta 2 (nodi 2-3), l'asta 5 (nodi 3-5) e l'asta 8 (nodi 5-7) vengono tagliate per rendere la struttura aperta.

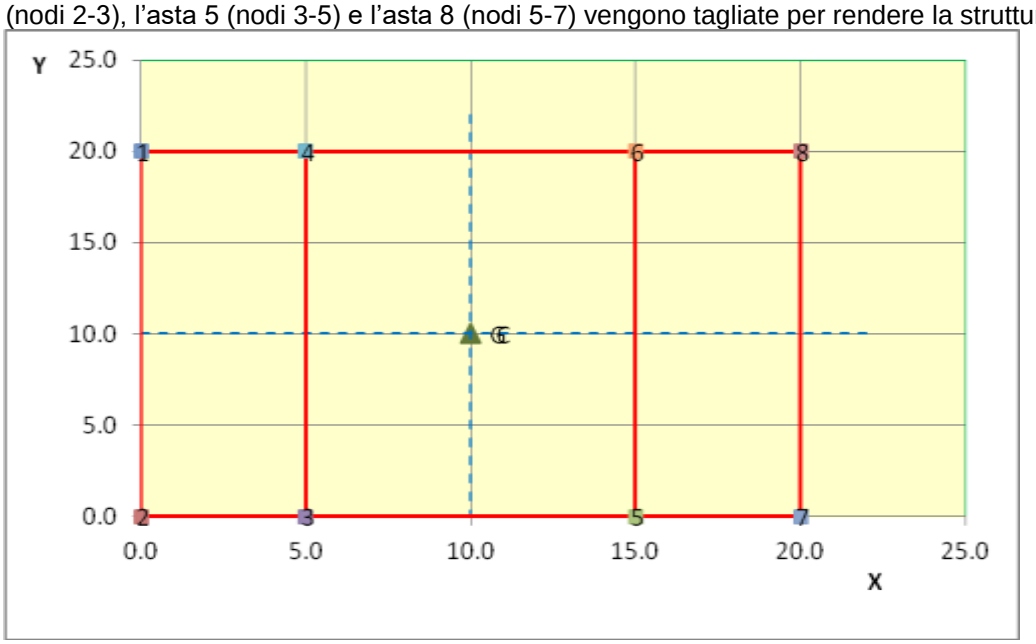


Figura 18

Coordinate dei nodi			maglia	Tipologia elementi			
Nodo	x	y	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
1	0.000	20.000	**1**	1	**1**	**2**	1.000
2	0.000	0.000	**1**	2	**2**	**3**	1.000
3	5.000	0.000	**1,2**	3	**3**	**4**	1.000
4	5.000	20.000	**1**	4	**4**	**1**	1.000
5	15.000	0.000	**2**	5	**3**	**5**	1.000
6	15.000	20.000	**2,3**	6	**5**	**6**	1.000
7	20.000	0.000	**2**	7	**6**	**4**	1.000
8	20.000	20.000	**3**	8	**5**	**7**	1.000
			3	9	**7**	**8**	1.000
			3	10	**8**	**6**	1.000

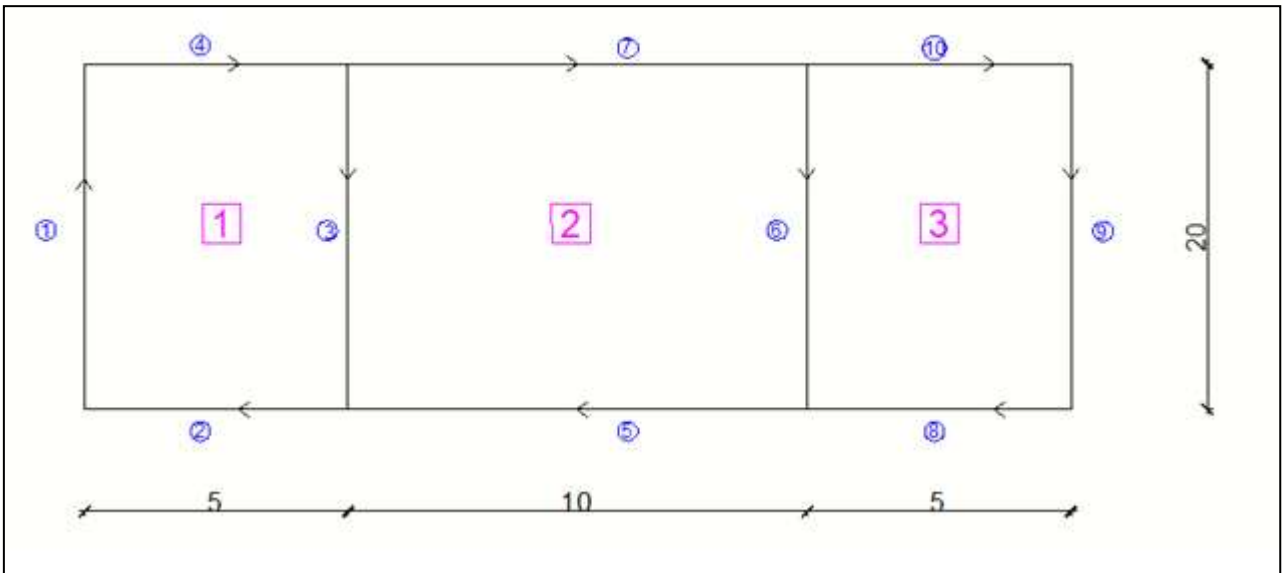


Figura 19

asta	nodo iniz.	nodo finale	t	xi	yi	xf	yf	L	L·t	Dy	Dx
1	1	2	1	0	20	0	0	20.00	20.00	-20.00	0.00
2	2	3	1	0	0	5	0	5.00	5.00	0.00	-5.00
3	3	4	1	5	0	5	20	20.00	20.00	20.00	0.00
4	4	1	1	5	20	0	20	5.00	5.00	0.00	5.00
5	3	5	1	5	0	15	0	10.00	10.00	0.00	-10.00
6	5	6	1	15	0	15	20	20.00	20.00	20.00	0.00
7	6	4	1	15	20	5	20	10.00	10.00	0.00	10.00
8	5	7	1	15	0	20	0	5.00	5.00	0.00	-5.00
9	7	8	1	20	0	20	20	20.00	20.00	20.00	0.00
10	8	6	1	20	20	15	20	5.00	5.00	0.00	5.00

I coeffcienti della matrice $[A]$

Matrice A[10x16]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-20	0
2	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5
3	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0
4	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-10
5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	20	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	-5
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	20	0
8	25	20	5	5	20	35	10	10	20	35	5	5	20	25	0	0
9	25	0	25	50	300	600	250	350	900	1500	250	275	1200	1475	0	0
10	1100	400	0	0	400	1700	0	0	400	1700	0	0	400	1100	0	0

Alla riga 8 I valori di L·t cambiano per l'asta 1-3-6-9 perché dovranno essere integrati con i valori di area delle aste 2-5-8 eliminate.Il primo valore iniziale sarà 20 per l'asta 1 + 5 dell' asta 2 =25, mentre il valore finale rimarrà invariato cioè 20. Per l'asta 3 il primo valore iniziale rimarrà invariato (20) mentre il secondo sarà 25. Il discorso è il medesimo per le righe 9 e 10.

asta	nodo iniz.	nodo finale	Ak	An	Bn	Cn	Dn
1	1	2	20.00	0.00	0.00	800.00	400.00
2	2	3	5.00	25.00	50.00	0.00	0.00
3	3	4	20.00	300.00	300.00	400.00	800.00
4	4	1	5.00	50.00	25.00	300.00	300.00
5	3	5	10.00	250.00	350.00	0.00	0.00
6	5	6	20.00	900.00	900.00	400.00	800.00
7	6	4	10.00	350.00	250.00	600.00	600.00
8	5	7	5.00	250.00	275.00	0.00	0.00
9	7	8	20.00	1200.00	1200.00	400.00	800.00
10	8	6	5.00	275.00	250.00	300.00	300.00

La matrice C è di ovvio assemblaggio:

Matrice C[16x10]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

I valori della matrice R dei termini noti potranno essere dedotti una volta conosciuti i valori Ψ_i di ogni cella attraverso la risoluzione del seguente sistema:

I termini della diagonale:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{t_i}=\frac{L_1}{t_1}+\frac{L_2}{t_2}+\frac{L_3}{t_3}+\frac{L_4}{t_4}=20+5+20+5=50$$ per la maglia 1 e la maglia 3

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{t_i}=\frac{L_3}{t_3}+\frac{L_7}{t_7}+\frac{L_6}{t_6}+\frac{L_5}{t_5}=20+10+20+10=60$$ per la maglia

Per le aste comuni:

$$-\frac{L_3}{t_3}=-\frac{L_6}{t_6}=-20$$ per le aste 3 e 6

$$2\cdot\Omega_1=2\cdot\Omega_3=200$$
$$2\cdot\Omega_2=400$$

$$50 \cdot \Psi_1 - 20 \cdot \Psi_2 = 200$$
$$-20 \cdot \Psi_1 + 60 \cdot \Psi_2 - 20 \cdot \Psi_3 = 400$$
$$-20 \cdot \Psi_2 + 50 \cdot \Psi_3 = 200$$

La risoluzione del sistema porta i 3 valori delle incognite:

$$\Psi_1 = \Psi_3 = 9.09 = \frac{100}{11}$$

$$\Psi_2 = 12.73 = \frac{140}{11}$$

asta	t	xi	yi	xf	yf	L	L·t	Dy	Dx	xDy+yDx	cella 1	cella 2	(1) Ψ_1*L/t	(2) Ψ_{12}*L/t	(2)-(1) R
1	1	0	20	0	0	20.00	20.00	-20.00	0.00	0.00	1	0	181.82	0.00	-181.82
2	1	0	0	5	0	5.00	5.00	0.00	-5.00	0.00	1	0	45.45	0.00	-45.45
3	1	5	0	5	20	20.00	20.00	20.00	0.00	100.00	1	2	181.82	254.55	172.73
4	1	5	20	0	20	5.00	5.00	0.00	5.00	100.00	1	0	45.45	0.00	54.55
5	1	5	0	15	0	10.00	10.00	0.00	-10.00	0.00	2	0	127.27	0.00	-127.27
6	1	15	0	15	20	20.00	20.00	20.00	0.00	300.00	2	3	254.55	181.82	227.27
7	1	15	20	5	20	10.00	10.00	0.00	10.00	200.00	2	0	127.27	0.00	72.73
8	1	15	0	20	0	5.00	5.00	0.00	-5.00	0.00	3	0	45.45	0.00	-45.45
9	1	20	0	20	20	20.00	20.00	20.00	0.00	400.00	3	0	181.82	0.00	218.18
10	1	20	20	15	20	5.00	5.00	0.00	5.00	100.00	3	0	45.45	0.00	54.55

La matrice R non considerando i valori delle aste interrotte (righe gialle) sarà:

Matrice R

-181.82
-45.45
172.73
-127.27
227.27
-45.45
218.18
0.00
0.00
0.00

Otteniamo la matrice prodotto $[B]=[A]x[C]$

-1	1	0	0	0	0	0	0	-20	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	-5
0	0	-1	1	0	0	0	0	20	0
0	0	-1	0	1	0	0	0	0	-10
0	0	0	0	-1	1	0	0	20	0
0	0	0	0	-1	0	1	0	0	-5
0	0	0	0	0	0	-1	1	20	0
25	25	35	35	35	35	25	25	0	0
25	25	600	600	1500	1500	1475	1475	0	0
1100	400	400	1700	400	1700	400	1100	0	0

Invertiamo la matrice B e otteniamo i valori di $[\omega_G]=[B^{-1}]x[R]$

Matrice B^{-1}

-0.6175	-0.4101	-0.4268	0.1184	-0.1899	0.1732	-0.0009	0.0046	-0.0003	0.0003
0.2075	-0.4101	-0.1018	0.1184	0.1351	0.1732	0.1741	0.0196	-0.0003	-0.0003
0.1121	0.3991	-0.0425	-0.1908	0.0759	-0.0175	0.0787	0.0156	-0.0001	-0.0003
0.2871	0.3991	0.6325	-0.1908	-0.2491	-0.0175	-0.0963	0.0006	-0.0001	0.0003
-0.0787	0.0175	0.0759	0.1908	-0.0425	-0.3991	-0.1121	0.0077	0.0001	-0.0003
0.0963	0.0175	-0.2491	0.1908	0.6325	-0.3991	-0.2871	-0.0073	0.0001	0.0003
-0.1741	-0.1732	0.1351	-0.1184	-0.1018	0.4101	-0.2075	0.0038	0.0003	-0.0003
0.0009	-0.1732	-0.1899	-0.1184	-0.4268	0.4101	0.6175	-0.0112	0.0003	0.0003
-0.0088	0.0000	0.0163	0.0000	0.0163	0.0000	0.0088	0.0008	0.0000	0.0000
-0.0191	-0.0382	0.0118	-0.0618	-0.0118	-0.0382	-0.0191	-0.0008	0.0000	0.0000

nodo	ω
1	-9.09
2	9.09
3	13.64
4	-13.64
5	-13.64
6	13.64
7	-9.09
8	9.09
xc	10.00
yc	10.00

CARATTERISTICHE SETTORIALI DELLA SEZIONE (WARPING PROPERTIES)

Coordinata x del centro di taglio rispetto all'origine x_{co}	10.00	mm
Coordinata y del centro di taglio rispetto all'origine y_{co}	10.00	mm
Costante di ingobbamento (Warping constant) I_ω	7438.02	mm^6

Funzione di ingobbamento ω_C rispetto a C (warping coordinates)

Nodo	ω_C mm²
1	-9.091
2	9.091
3	13.636
4	-13.636
5	-13.636
6	13.636
7	-9.091
8	9.091

Asta	Inizio nodo ω_{Ci}	Nodo finale ω_{Ck}	Nodo finale ω_{Cj}
1	-9.091	-4.545	9.091
2	9.091	4.545	13.636
3	13.636	6.818	-13.636
4	-13.636	-6.818	-9.091
5	13.636	6.818	-13.636
6	-13.636	-6.818	13.636
7	13.636	6.818	-13.636
8	-13.636	-6.818	-9.091
9	-9.091	-4.545	9.091
10	9.091	4.545	13.636

Dal capitolo III sulla torsione non uniforme per una trave doppiamente appoggiata di una certa lunghezza e caricata per esempio con un momento torcente uniforme, conosciamo immediatamente il valore del momento totale e quanto di questo momento in una certa sezione è dovuto al momento classico alla Saint Venant M_{SV} e quanto dovuto all'ingobbamento M_ω.Conosciamo anche il valore del Bi-Momento B e applicando l'equazione seguente sarà possibile calcolare la tensione normale di ingobbamento in ogni punto della sezione.

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega}\omega$$

1.13 CALCOLO DEL MOMENTO STATICO DI INGOBBAMENTO S_ω PER UN PROFILO PLURICONNESSO

La definizione del momento statico di ingobbamento rispetto al centro di taglio in ogni tratto di lunghezza Li e spessore t lungo la linea media s

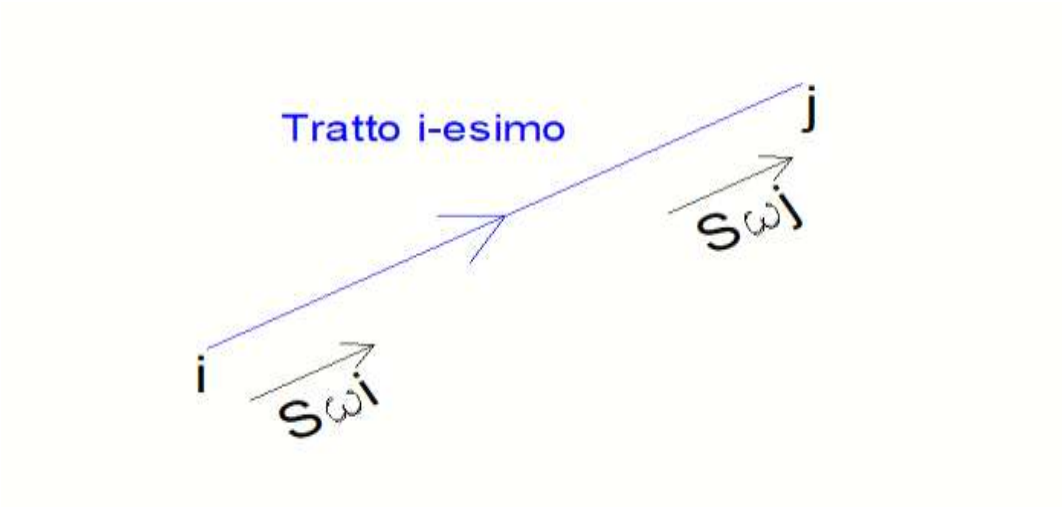
$$S_\omega = \int_0^{L_i} \omega(s) \cdot dA = \int_0^{L_i} \omega(s) \cdot t \cdot ds$$

che andrà integrato su tutta la linea media della sezione.
Da quanto indicato nei capitoli precedenti, conosciamo la funzione di ingobbamento ω che ha andamento lineare in ogni tratto e vale:

$$\omega(s) = \frac{\omega_j - \omega_i}{L_i} \cdot s + \omega_i$$

Nel singolo tratto l'integrazione è semplice:

$$S_\omega = \frac{\omega_j + \omega_i}{2} \cdot L_i \cdot t + \cos t$$

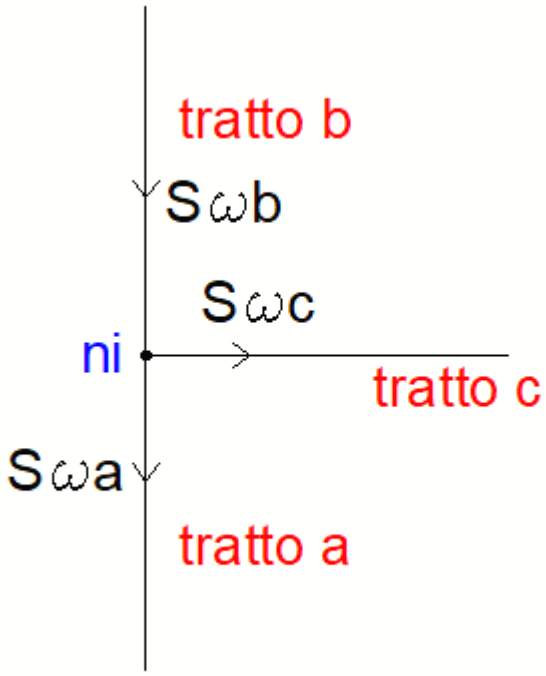


Se indichiamo con Δ la quantità costante per ogni tratto

$$\Delta = S_{\omega i} - S_{\omega j} = \frac{\omega_j + \omega_i}{2} \cdot L_i \cdot t \qquad (1)$$

e se conosciamo i valori del momento statico di ingobbamento all'inizio e alla fine del tratto siamo in grado di calcolare il momento statico di ingobbamento in ogni punto della sezione.
Per ogni nodo ni possiamo scrivere una condizione di congruenza che, per esempio, per il nodo raffigurato vale:

$$S_{\omega ai} = S_{\omega bj} + S_{\omega cj} \qquad (2)$$



Quindi se N è il numero dei tratti o aste avremo N equazioni (le 1) e 2N incognite e cioè i valori $S_{\omega i}$ e $S_{\omega j}$ iniziali e finali di ogni tratto.
Sono necessarie altre N equazioni costituite dalle (2).

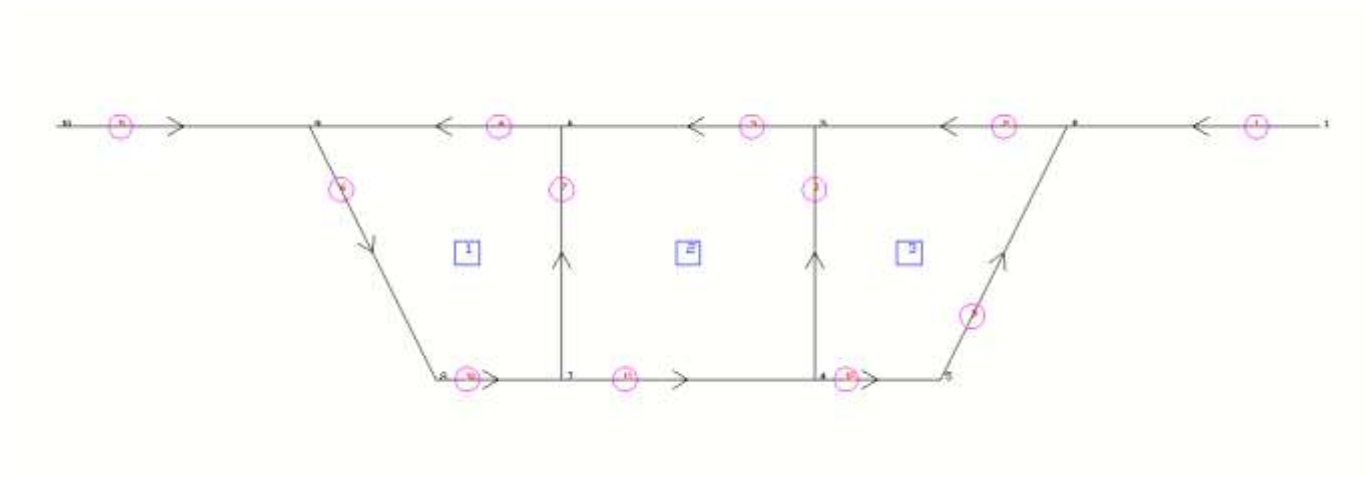
Per un profilo aperto sappiamo che se n è il numero dei nodi e N il numero delle aste vale la relazione n=N+1 e quindi basterà scrivere per gli n-1 nodi le equazioni di congruenza e si trovano i valori di $S\omega$ iniziali e finali, mentre per un profilo chiuso dovremo procedere diversamente.

Innanzitutto come al solito dovremo interrompere le maglie chiuse per renderle aperte e poi scrivere la condizione di congruenza tra le maglie per ripristinare il profilo.

In un profilo chiuso abbiamo a disposizione 2N e incognite in N+n+m equazioni con m che indica il numero di maglie. Poiché in un profilo chiuso vale la relazione m+n=N+1 e di conseguenza sostituendo N+N+1 sono le equazioni a disposizione, basterà imporre una condizione per m-1 maglie.
Illustriamo il procedimento approssimato con un esempio. La sezione è quella di seguito riportata dove sono indicati i nodi n=10 i tratti N=12 e le maglie m=3, oltre ai versi di percorrenza. Le incognite sono 2N=24 e quindi abbiamo necessità di 24 equazioni:

$S_{\omega i} - S_{\omega j} = \Delta_i$ 12 nei tratti

10 nei nodi e 3-1 =2 nelle maglie dove per ogni interruzione scriveremo $S_{\omega i} = 0$



dalla risoluzione della funzione di ingobbamento con il metodo di Murray –Attard conosciamo gli ω in ogni nodo e di conseguenza il valore medio ωk

$$\omega_k = \frac{\omega_i + \omega_j}{2} \qquad \text{e} \qquad \Delta = A_k \cdot (\omega_i + \omega_j)/2$$

I dati sono i seguenti avendo interrotto la maglia 1 nel nodo 8 (asta 10), la maglia 2 nel nodo 7 (asta11) e la maglia 3 nel nodo 4 (asta 12):

Coordinate dei nodi			maglia					Interruzione
Nodo	x	y	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore	s/d
1	250.000	100.000	0	1	1	2	1.000	
2	150.000	100.000	3	2	2	3	1.000	
3	50.000	100.000	2	3	3	6	1.000	
4	50.000	0.000	1	4	6	9	1.000	
5	100.000	0.000	0	5	10	9	1.000	
6	-50.000	100.000	1	6	9	8	0.500	
7	-50.000	0.000	1,2	7	7	6	0.500	
8	-100.000	0.000	2,3	8	4	3	0.500	
9	-150.000	100.000	3	9	5	2	0.500	
10	-250.000	100.000	1	10	8	7	1.200	d
			2	11	7	4	1.200	d
			3	12	4	5	1.200	d

Seg.	Nodo i	Nodo j	t (mm)	Lk (mm)	Lk/t	Ak (mm^2)	w'i (mm^2)	w'k (mm^2)	w'j (mm^2)	Δ (mm^4)
1	1	2	1.00	100.000	100.000	100.000	-3241.12	-878.92	1483.29	-87891.73
2	2	3	1.00	100.000	100.000	100.000	1483.29	1292.87	1102.45	129287.01
3	3	6	1.00	100.000	100.000	100.000	1102.45	0.00	-1102.45	0.00
4	6	9	1.00	100.000	100.000	100.000	-1102.45	-1292.87	-1483.29	-129287.01
5	9	10	1.00	100.000	100.000	100.000	3241.12	878.92	-1483.29	87891.73
6	9	8	0.50	111.803	223.607	55.902	-1483.29	-872.24	-261.18	-48759.52
7	7	6	0.50	100.000	200.000	50.000	249.42	-426.51	-1102.45	-21325.75
8	4	3	0.50	100.000	200.000	50.000	-249.42	426.51	1102.45	21325.75
9	5	2	0.50	111.803	223.607	55.902	261.18	872.24	1483.29	48759.52
10	8	7	1.20	50.000	41.667	60.000	-261.18	-5.88	249.42	-352.90
11	7	4	1.20	100.000	83.333	120.000	249.42	0.00	-249.42	0.00
12	4	5	1.20	50.000	41.667	60.000	-249.42	5.88	261.18	352.90

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12				
i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	Δ		
-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-87891.73		
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	129287.01		
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00		
0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-129287.01		
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	87891.73		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-48759.52		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-21325.75		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	21325.75		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	48759.52		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-352.90		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0.00		aste conc
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	352.90	nodo	nodo
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	1	1
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0.00	2	1-2-9
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	3	2-3-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0.00	4	8-11-12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0.00	5	9-12
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	6	3-4-7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0.00	7	7-10-11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	8	6-10
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	9	4-5-6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	10	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.00	maglia	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.00	maglia	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00	maglia	1

L'ultima riga segnata in verde è superflua. Il sistema costituito dalla matrice dei coefficienti $[C]$ dalla matrice $[X]$ delle incognite S'ω (della sezione monoconnessa con le interruzioni) e dai termini noti della matrice $[\Delta]$:

$[C]\cdot[X]=[\Delta]$ permette di ricavare i valori S'ω:

S'_ω
0.00
-87891.73
-38779.32
90507.69
111833.44
111833.44
90154.80
-39132.21
0.00
87891.73
0.00
-48759.52
-352.90
-21678.64
0.00
21325.75
352.90
49112.42
0.00
-352.90
0.00
0.00
0.00
352.90

Tratto	Sw'i m^4	Sw'k m^4	Sw'j m^4
1	0.00	-103001.03	-87891.73
2	-38779.32	30624.67	90507.69
3	111833.44	139394.72	111833.44
4	90154.80	30271.77	-39132.21
5	0.00	103001.03	87891.73
6	0.00	-32919.48	-48759.52
7	-352.90	-2566.57	-21678.64
8	0.00	2213.67	21325.75
9	352.90	16192.94	49112.42
10	0.00	-4005.99	-352.90
11	0.00	7482.63	0.00
12	0.00	-3653.09	352.90

che sono i valori del momento statico in ogni tratto della sezione resa monoconnessa con le interruzioni.
Il valore intermedio si trova integrando con Simpson.

$$S_{\omega k} = S_{\omega i} + L_k \cdot t(\frac{3}{8} \cdot \omega_i + \frac{1}{8}\omega_j)$$

oppure, che è lo stesso

$$S_{\omega k} = \frac{3}{4} S_{\omega i} + \frac{1}{4} S_{\omega j} + \frac{L_k \cdot t \cdot \omega_i}{4}$$

È ora necessario ripristinare la continuità per cui scriveremo il sistema di congruenza per le 3 maglie attraverso i seguenti passaggi:

- Indichiamo con $S_{\omega,ijk}$ il momento statico di ingobbamento precedentemente trovato relativo ai nodo i,j,k e dividiamolo per la costante di ingobbamento per indicare il flusso:

$$q_{\omega,ijk} = -\frac{S_{\omega,ijk}}{I_\omega}$$

- Troviamo il flusso di correzione dovuto al fatto che le maglie sono chiuse e non aperte

$$q_{fin} = q - q_{corr} = q - \left[\frac{\oint \frac{q}{t} \cdot dS}{\oint \frac{1}{t} \cdot dS} \right]$$

dove: $\oint \frac{q}{t} \cdot dS = \frac{1}{6} \cdot (q_i + 4q_k + q_j) \cdot \frac{L}{t}$ $\qquad \oint \frac{q}{t} \cdot dS = \sum \int \frac{q}{t} \cdot dS$

e $\oint \frac{1}{t} \cdot dS$ è la solita matrice K della somma dei rapporti L/t di ogni cella

$$K_{i,i} = \sum_{i=1}^{astecella} \frac{L_i}{t_i} \qquad K_{i,j} = -\frac{L}{t}$$ per le aste di confine tra 2 maglie

Continuiamo con il procedimento numerico:

$$I_\omega = 1041{,}23 \mathrm{m}^6$$

segmento	q_w^{in}-i	q_w^{in}-k	q_w^{in}-j	K=Lk/tk	$\sum q_w^n \cdot ds/t$
1	0.000000	0.000099	0.000084	100.00	0.0080
2	0.000037	-0.000029	-0.000087	100.00	-0.0028
3	-0.000107	-0.000134	-0.000107	100.00	-0.0125
4	-0.000087	-0.000029	0.000038	100.00	-0.0028
5	0.000000	-0.000099	-0.000084	100.00	-0.0080
6	0.000000	0.000032	0.000047	223.61	0.0065
7	0.000000	0.000002	0.000021	200.00	0.0010
8	0.000000	-0.000002	-0.000020	200.00	-0.0010
9	0.000000	-0.000016	-0.000047	223.61	-0.0041
10	0.000000	0.000004	0.000000	41.67	0.0001
11	0.000000	-0.000007	0.000000	83.33	-0.0004
12	0.000000	0.000004	0.000000	41.67	0.0001

Matrice K

	1	2	3
1	565.273	-200.000	0.000
2	-200.000	583.333	-200.000
3	0.000	-200.000	565.273

Matrice dati

	$q_{bx}^{in}{}_{cell}$
maglia 1	0.005
maglia 2	-0.013
maglia 3	-0.008

Invertendo la matrice K e moltiplicandola per la matrice dati si trova il flusso di correzione per ogni maglia che sottratto ai valori calcolati di $q_{\omega,ijk}$ per mette di trovare il valore del flusso totale in ogni asta e conseguentemente i valori del momento statico di ingobbamento finale S_ω

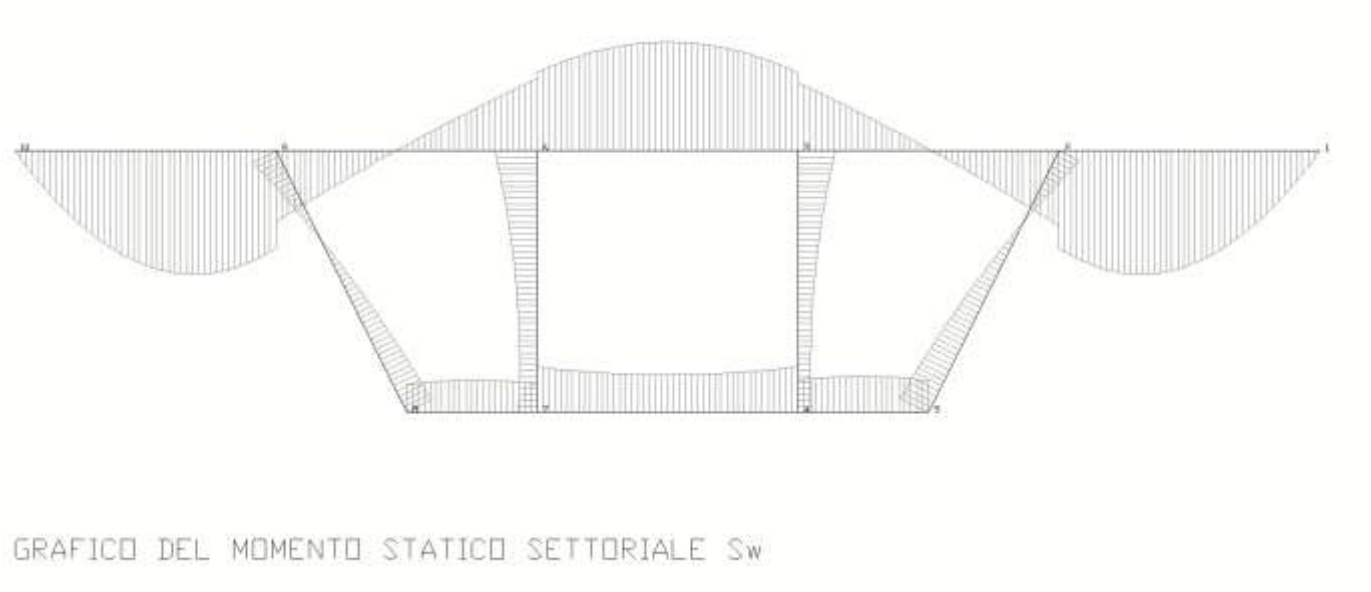
flusso di correzione:

	$(K^{-1})x(q_{bx}^{in}{}_{cell})$
maglia 1	-2.52843E-06
maglia 2	-3.13788E-05
maglia 3	-2.481E-05

Momento statico di ingobbamento

segmento	$\sum q_w^n \cdot ds/t$	q_{wcorr}^{-1} tot	Swi mm^4	Swk mm^4	Swj mm^4
1	0.0080	0.0000000	0.00	103001.03	87891.73
2	-0.0028	-0.0000248	64612.22	-4791.77	-64674.79
3	-0.0125	-0.0000314	-79160.87	-106722.15	-79160.87
4	-0.0028	-0.0000025	-87522.12	-27639.09	41764.89
5	-0.0080	0.0000000	0.00	-103001.03	-87891.73
6	0.0065	-0.0000025	2632.67	35552.15	51392.19
7	0.0010	-0.0000289	30392.79	32606.47	51718.54
8	-0.0010	0.0000066	-6839.67	-9053.34	-28165.42
9	-0.0041	-0.0000248	25480.00	9639.96	-23279.52
10	0.0001	-0.0000025	2632.67	6638.66	2985.57
11	-0.0004	-0.0000314	32672.57	25189.94	32672.57
12	0.0001	-0.0000248	25832.90	29485.99	25480.00

Il grafico finale è il seguente:



Dal capitolo III sulla torsione non uniforme per una trave doppiamente appoggiata di una certa lunghezza e caricata per esempio con un momento torcente uniforme, conosciamo immediatamente il valore del momento totale e quanto di questo momento in una certa sezione è dovuto al momento classico alla Saint Venant M_{SV} e quanto dovuto all'ingobbamento M_ω. Applicando l'equazione seguente sarà possibile calcolare la tensione tangenziale classica e la tensione di ingobbamento in ogni punto della sezione.

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{t \cdot I_\omega}$$

2 SOLLECITAZIONI DI PRESSOFLESSIONE, TORSIONE E TAGLIO NELLE SEZIONI A PARETE SOTTILE

2.1 PRESSOFLESSIONE DEVIATA NELLE STRUTTURE A PARETE SOTTILE

Il calcolo delle tensioni flessionali in una struttura monoconnessa o pluriconnessa non presta alcuna difficoltà ed è praticamente identico a quanto applicato per le sezioni compatte:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{I_x M_Y - M_x I_{XY}}{\left(I_x I_y - I_{xy}{}^2\right)} x + \frac{I_y M_x - M_y I_{XY}}{\left(I_x I_y - I_{xy}{}^2\right)} y$$

naturalmente se I_{xy} =0

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_Y} x + \frac{M_X}{I_{xy}{}^2} y$$

La formula generale è più pratica rispetto alla classica formula della pressoflessione deviata.

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_n}$$

Si fa riferimento alla figura 20, in cui viene rappresentato un doppio tubolare 90x50x5 mm relativo alla verifica di un piedritto di un'incastellatura per un impianto ascensore installato nel lontano 1991 ed eseguita dallo scrivente.
Il calcolo con la formula:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_n}$$

Con

$$tg\beta = -\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2\left[tg\left(\alpha - \varphi\right)\right]}$$ inclinazione dell'asse neutro

$$I_n = A\rho_n^2$$ inerzia rispetto all'asse n

$$\rho_n = \rho_x \rho_y \sqrt{\frac{1 + tg^2\left(\alpha - \varphi\right)}{\rho_x^2 + \rho_y^2 tg^2\left(\alpha - \varphi\right)}}$$ raggio di inerzia rispetto a n

$$W_n = \frac{I_n}{\eta_{\max}}$$ modulo resistenza rispetto a n

Sollecitazioni:

N	**1000.00**	daN
Mx	**2500.00**	daNcm
My	**3500.00**	daNcm

Tubolare doppio L 90x50x5mm

Caratteristiche geometriche

Baricentro	Xg	3.50	cm
	Yg	6.00	cm
Area	A	26.00	cm^2
Mom. Stat.	Sx	156.00	cm^3
	Sy	91.00	cm^3
Inerzia risp. X,Y	Ix	1438.67	cm^4
	Iy	528.67	cm^4
	Ixy	455.00	cm^4
Inerzia risp. Xg,Yg	Ixg	502.67	cm^4
	Iyg	210.17	cm^4
	Ixyg	-91.00	cm^4
Inerzia risp. Xp,Yp	Ixp	528.67	cm^4
(assi principali)	Iyp	184.17	cm^4
	$\varphi°$	15.95	
Raggi princ. Inerzia	ρ_x	4.51	cm
	ρ_y	2.66	cm
Asse sollecitazione (s) (inclin. assi baric.)	$\alpha°$	35.54	
Asse neutro (n) (inclin. assi princ.)	$\beta°$	97.07	
se incl. Asse X	$\beta_o°$	113.01	
Raggio Inerzia risp. n	ρ_n	2.76	cm
Inerzia risp. n	In	198.73	cm^4
Asse n traslato di	η_o	-1.78	cm
Massima distanza da n	η_{max}	5.70	cm
Modulo di resistenza su n	Wn	34.85	cm^3

Verifica di resistenza			
Tensioni	σ_{max}	161.89	daN/cm^2

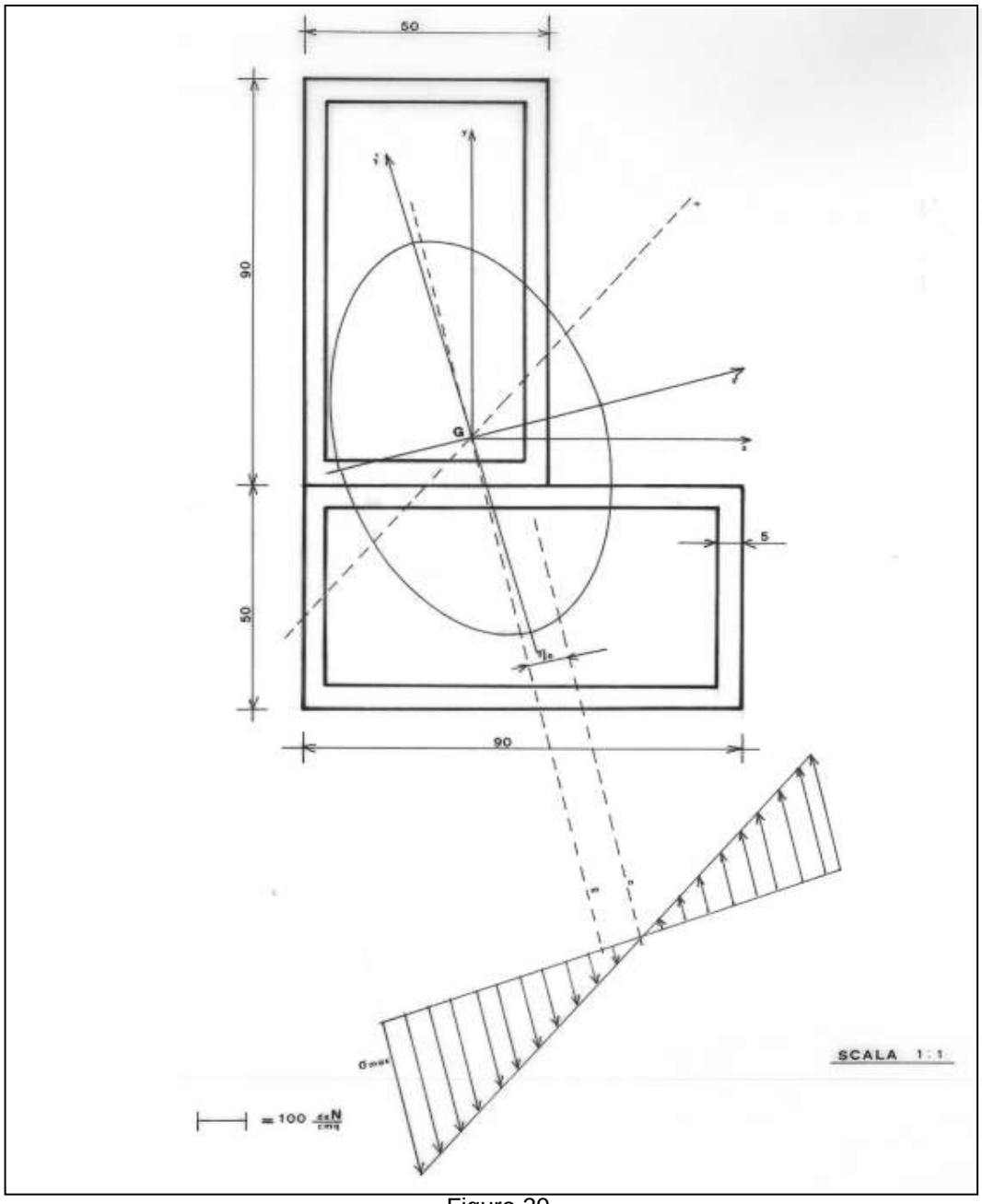


Figura 20

Applicando la $\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_n}$

si ottiene:

Jx	**502.67**	cm^4
Jy	**210.17**	cm^4
Jxy	**-91.00**	cm^4
A	**26.00**	cm^2
B	**97362.78**	cm^8
α	**35.54**	
η_{max}	**5.70**	cm
σ_N	**38.46**	**daN/cm²**
σ_x	**94.65**	**daN/cm²**
σ_y	**28.78**	**daN/cm²**
σ_{TOT}	**161.89**	**daN/cm²**

Il foglio elettronico excel, noti i dati della sezione Ix,Iy,Ixy, le sollecitazioni N,Mx,My, calcola le coordinate rispetto al baricentro dei punti di nodo e di metà tratto e le sollecitazioni conseguenti.

ESEMPIO: Si esegue il calcolo a pressoflessione deviata relativa alla seguente sezione tratta dal Franciosi "Problemi di scienze delle costruzioni Vol II cap VIII pag. 626 appendice II figura 37.

Con riferimento alla figura 21 (vedi Archivio sezioni n. 4) sotto riportata ed alle coordinate dei nodi:
unità di misura:mm
nodi: 8

Coordinate dei nodi		
Nodo	**x**	**y**
1	110.000	290.000
2	110.000	120.000
3	500.000	120.000
4	785.000	120.000
5	785.000	290.000
6	785.000	465.000
7	500.000	465.000
8	500.000	290.000

maglia num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
3	1	**1**	**2**	20.000
3	2	**2**	**3**	40.000
2	3	**3**	**4**	40.000
2	4	**4**	**5**	30.000
1	5	**5**	**6**	20.000
1	6	**6**	**7**	30.000
3	7	**8**	**1**	20.000
1	8	**7**	**8**	20.000
2,3	9	**8**	**3**	20.000
1,2	10	**8**	**5**	20.000

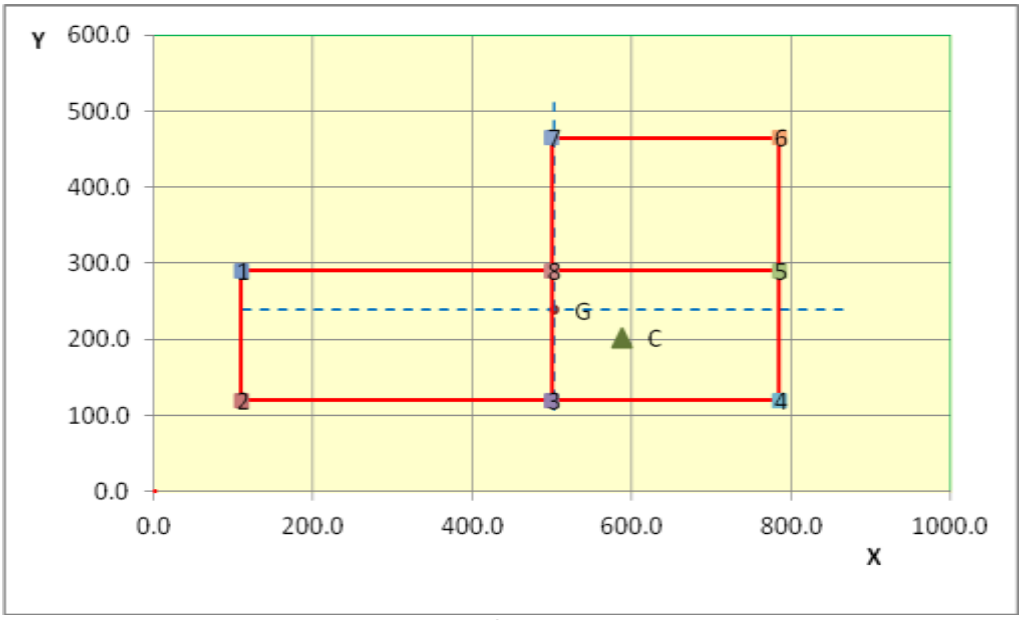


Figura 21

Caratteristiche geometriche:

Origine nel baricentro					
A =	67950.00	mm^2	H =	345.000	mm
P =	2495.00	mm	W =	675.000	mm
x_G =	503.20	mm	S_x^{top}=	4652775.02	mm^3
y_G =	238.60	mm	S_x^{bot}=	8882058.75	mm^3
I_x =	1053396481.79	mm^4	S_y^{right}=	10988738.52	mm^3
I_y =	3096677456.54	mm^4	S_y^{left}=	7875671.33	mm^3
I_{xy} =	541794983.44	mm^4			
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	13.97	gradi	ρ_x =	116.27	mm
I_{xp} =	918623941.94	mm^4	ρ_y =	218.07	mm^3
I_{yp} =	3231449996.39	mm^4			
I_p =	3608278954.88	mm^4			

Sforzo normale	N	**1000.00**	kN	positivo se di compressione
Momento	Mx	**300.00**	KNm	positivo se comprime le fibre superiori
Momento	My	**150.00**	KNm	positivo se comprime le fibre a destra della sezione

Verifica globale della sezione

	daN/cm²	verifica
massima tensione positiva σ**tot**	**793.77**	Ok
massima tensione negativa σ**tot**	**-195.82**	Ok

			Tens. Norm.	Tensione flessionale			Tensione totale		
Segm.	Nodo i	Nodo j	σN daN/cm^2	σM-i daN/cm^2	σM-k daN/cm^2	σM-j daN/cm^2	σtot-i daN/cm^2	σtot-k daN/cm^2	σtot-j daN/cm^2
1	1	2	147.17	152.79	-89.95	-332.69	299.96	57.22	-185.52
2	2	3	147.17	-332.69	-335.67	-338.64	-185.52	-188.50	-191.47
3	3	4	147.17	-338.64	-340.82	-342.99	-191.47	-193.65	-195.82
4	4	5	147.17	-342.99	-100.25	142.49	-195.82	46.92	289.66
5	5	6	147.17	142.49	392.37	642.25	289.66	539.54	789.42
6	6	7	147.17	642.25	644.43	646.60	789.42	791.59	793.77
7	8	1	147.17	146.84	149.82	152.79	294.01	296.98	299.96
8	7	8	147.17	646.60	396.72	146.84	793.77	543.89	294.01
9	8	3	147.17	146.84	-95.90	-338.64	294.01	51.27	-191.47
10	8	5	147.17	146.84	144.67	142.49	294.01	291.83	289.66

daN/cm^2	N/mm^2	KN/m^2	KN/cm^2	KN/mm^2	MPa	Pa	KPa	Bar	atm	pound/inch^2 (psi)	lbf/ft^2 (pound/ft^2)
793.77	77.84	79376.89	7.78	0.08	77.84	77842138	77842.14	778.42	768.25	11290	1625766
-195.82	-19.20	-19582.27	-1.92	-0.02	-19.20	-19203642	-19203.64	-192.04	-189.53	-2785	-401076

2.2 LA TORSIONE NELLE STRUTTURE PLURICELLULARI A PROFILI SOTTILI

Il problema della torsione in sezioni sottili pluriconnesse, può essere risolto con questo procedimento in modo diretto quando il grado di connessione è superiore a due (profilo chiuso da almeno una maglia). Si faccia riferimento a una generica sezione pluriconnessa, del tipo rappresentata in Figura 2, soggetta alla coppia torcente T.
Come precedentemente indicato un nodo è un punto della sezione nel quale concorrono almeno due tratti. Per semplicità si considera costante lo spessore in ogni segmento. La sezione di Figura 21 è pluriconnessa.
Indicato con m il numero delle maglie chiuse, n il numero dei nodi e t il numero dei tratti che li collegano, in generale risulta:
m + n= t+1
avremo quindi m+n equazioni in t+1 incognite
Sia m = numero di maglie
n = numero di aste
T = Momento torcente applicato alla sezione positivo se antiorario
Θ= Angolo di torsione
G = Modulo di taglio
A_i = area di ogni maglia con i = 1,2,….m
δ_i = spessore di ogni asta con i = 1,2,….n
L_i = lunghezza di ogni asta
f_i = il flusso di taglio intono alla linea media di ogni maglia
Ci = linea media di ogni maglia
La formula di Bredt applicata a questa tipologia di sezioni è

$$2G\Theta A_i = \oint_{C_i} \frac{f(s)}{\delta(s)} ds \qquad i = 1,2\ldots.m \qquad (1)$$

$$T = 2\sum_{i=1}^{n} f_i A_i \qquad (2)$$

La torsione τ_i in ogni asta è:

$\tau_i = f_i / \delta_i$

Il sistema in m equazioni può essere risolto simultaneamente, e noto l'angolo di torsione Θ, la costante di torsione è data da:

$$J = \frac{T}{G\Theta} \qquad (3)$$

L'integrale della (1) può essere espresso come la somma di 2 integrali

$$\oint_{C_i} \frac{f(s)}{\delta(s)} ds = I_{ii} f_i + \sum_{j \in N_i} I_{ij} f_j$$

dove:

$$I_{ii} = \oint_{C_i} \frac{ds}{\delta(s)} \qquad I_{ij} = -\int_{C_{ij}} \frac{ds}{\delta(s)}$$ coefficienti di flessibilità

e per una maglia formata da 4 lati:

$$I_{i,i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{L_i}{\delta_i}$$

e se k sono le aste di confine tra le maglie

$$I_{i,j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{L_{i,j}}{\delta_{i,j}}$$

Il sistema diventa:

$$\sum_{J=i} I_{ij} f_j = 2G\Theta A_i \qquad (4)$$

La soluzione del sistema:

$$f_i = 2G\Theta \frac{D_i}{D} \quad \text{con i = 1,2,……m} \qquad (5)$$

Dove D=determinante di $I_{i,j}$

$$f_i = \frac{D_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i D_i} \cdot \frac{T}{2}$$

Sostituendo la (4) dentro la (2) si ottiene:

$$T = \frac{4G\Theta}{D} \sum_{i=1}^{n} A_i D_i$$

Il termine:

$J = \frac{4}{D} \sum_{i=1}^{n} A_i D_i$ è la costante di torsione dell'intera sezione

$f_i = \frac{D_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i D_i} \cdot \frac{T}{2}$ è il flusso in ogni tratto

Per esempio per la sezione a 3 maglie di figura 21 con spessore costante δ, la matrice $\mathbf{I_{i,j}}$

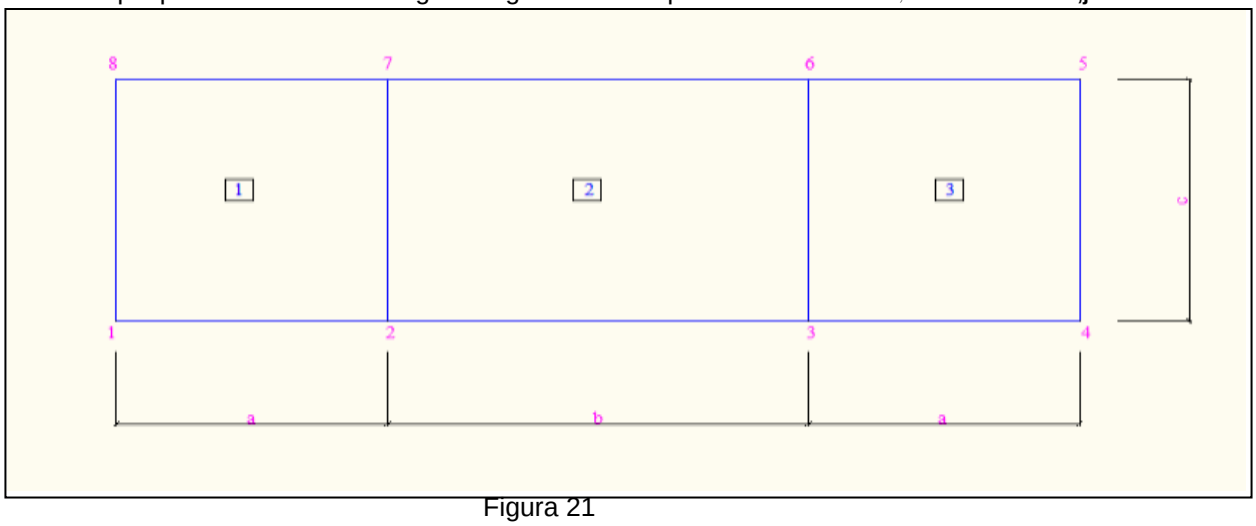


Figura 21

$$I(i,j) = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Omega_1 = \Omega_3 = a \cdot c$$

$$\Omega_2 = b \cdot c$$

$$I_{11} = \frac{2a}{\delta} + \frac{2c}{\delta} \qquad I_{22} = \frac{2b}{\delta} + \frac{2c}{\delta} \qquad I_{33} = I_{11}$$

$$I_{12} = I_{21} = I_{23} = I_{32} = -\frac{c}{\delta} \qquad I_{13} = I_{31} = 0$$

$D = I_{11}I_{22}I_{33} - I_{11}I_{23}^2 - I_{33}I_{12}^2$ è il determinante della matrice

$$I_{12} = I_{21} = I_{23} = I_{32} = -\frac{c}{\delta} \qquad I_{13} = I_{31} = 0$$

$$D = I_{11}I_{22}I_{33} - I_{11}I_{23}^2 - I_{33}I_{12}^2$$

$$\sum_{i=1}^{3} \Omega_i D_i = \Omega_1^2 (I_{22}I_{33} - I_{23}^2) + \Omega_2^2 (I_{33}I_{11} - I_{31}^2) + \Omega_3^2 (I_{11}I_{22} - I_{12}^2) +$$

$$+2\Omega_1\Omega_2 (I_{31}I_{23} - I_{33}I_{12}) + 2\Omega_2\Omega_3 (I_{12}I_{31} - I_{11}I_{23}) + 2\Omega_3\Omega_1 (I_{12}I_{23} - I_{22}I_{31})$$

$$I_{13} = I_{31} = 0$$

$$I_{12} = I_{23}$$

$$I_{11} = I_{33}$$

$$J = \frac{4}{D} \sum_{i=1}^{n} A_i D_i$$

$$J = 4 \cdot \frac{2\Omega_1^2 I_{22} - 4\Omega_1\Omega_2 I_{12} + \Omega_2^2 I_{11}}{I_{11}I_{22} - 2I_{12}^2}$$

$$f_1 = \frac{\Omega_1 I_{22} - \Omega_2 I_{12}}{2\Omega_1^2 I_{22} - 4\Omega_1\Omega_2 I_{12} + \Omega_2^2 I_{11}} \cdot \frac{T}{2}$$

$$f_2 = \frac{\Omega_2 I_{11} - 2\Omega_1 I_{12}}{2\Omega_1^2 I_{22} - 4\Omega_1\Omega_2 I_{12} + \Omega_2^2 I_{11}} \cdot \frac{T}{2}$$

Nel caso in cui:

a=2 m b=5 m c=3 m δ=0.03 m T=100 KNm
J=3.788 m^4
f1= 15.73 daN/cm f2= 20.75 daN/cm
τ=5.24 daN/cm^2 asta 1-2
τ=6.92 daN/cm^2 asta 2-3
τ=-1.67 daN/cm^2 asta 7-2
Nel caso di aree uguali e a=c=1 m δ=0.03 m T=100 KNm
J=32/7·a^3·δ=0.137 m^4
f1= 15.62 daN/cm f2= 18.75 daN/cm

Esempio applicativo tratto dal Franciosi "*Le travi con sezione retta sottile* " cap X pag. 323 (vedi figura 22)

Figure e dati iniziali:

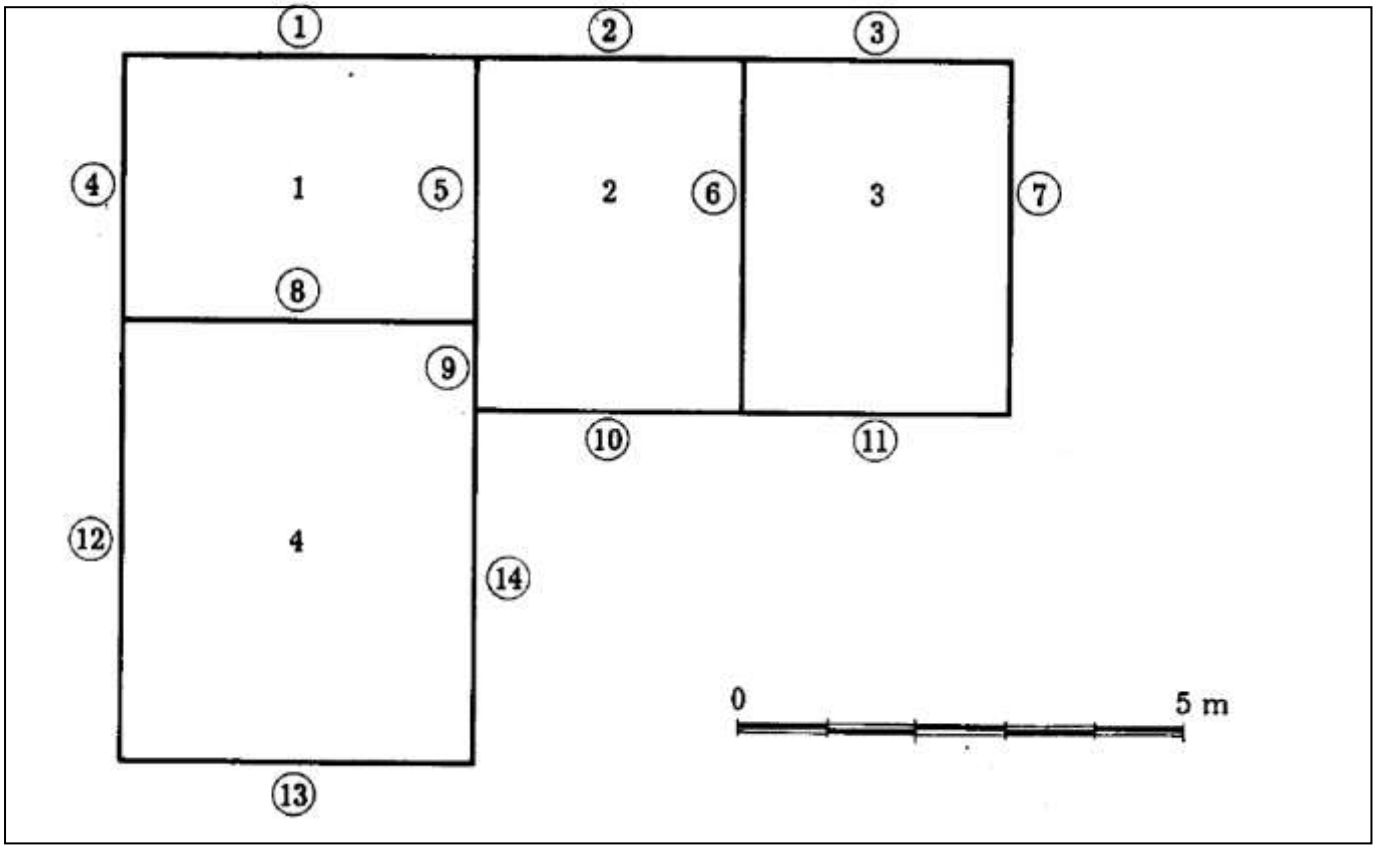


Figura 22

Tratto	ℓ (m)	δ (m)
1	4	0,020
2	3	0,020
3	3	0,020
4	3	0,020
5	3	0,010
6	4	0,010
7	4	0,015
8	4	0,010
9	1	0,010
10	3	0,015
11	3	0,015
12	5	0,020
13	4	0,015
14	4	0,015

Coordinate dei nodi		
Nodo	x	y
1	0.000	0.000
2	4.000	0.000
3	4.000	4.000
4	7.000	4.000
5	10.000	4.000
6	0.000	5.000
7	4.000	5.000
8	0.000	8.000
9	4.000	8.000
10	7.000	8.000
11	10.000	8.000

maglia	Tipologia elementi			
num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
1	1	8	9	0.020
2	2	9	10	0.020
3	3	10	11	0.020
1	4	8	6	0.020
1,2	5	9	7	0.010
2,3	6	10	4	0.010
3	7	11	5	0.015
1,4	8	6	7	0.010
4,2	9	7	3	0.010
2	10	3	4	0.015
3	11	4	5	0.015
4	12	1	6	0.020
4	13	1	2	0.015
4	14	2	3	0.015

Costruiamo la matrice I(i,j):

Asta	$I_{ij}=-L_i/\delta_i$
1	200.00
2	150.00
3	150.00
4	150.00
5	300.00
6	400.00
7	266.67
8	400.00
9	100.00
10	200.00
11	200.00
12	250.00
13	266.67
14	266.67

$I_{ii}=\Sigma L_i/s_i$	Ωi (m^2)
1050.00	12.00
1150.00	12.00
1016.67	12.00
1283.33	20.00

I(i,j)

1050.00	-300.00	0.00	-400.00
-300.00	1150.00	-400.00	-100.00
0.00	-400.00	1016.67	0.00
-400.00	-100.00	0.00	1283.33

D=Determ. I(i,j)

D=1.046 x 10^{12}

La matrice dei cofattore **d(i,j)** della matrice **I(i,j):**

1.38814E+12	4.67E+11	1.84E+11	4.69E+11
4.66789E+11	1.3E+12	5.13E+11	2.47E+11
1.83655E+11	5.13E+11	1.31E+12	9.72E+10
4.69039E+11	2.47E+11	9.72E+10	1.05E+12

I coefficienti C(i)= Σd(i,j)*Ω(i):

C(1)=3.38437E+13
C(2)=3.23529E+13
C(3)=2.60654E+13
C(4)=3.06784E+13

$$J_{t0} = \sum_{i=1}^{m} C(i) \cdot \Omega(i)$$

4.06E+14
3.88E+14
3.13E+14
6.14E+14

J_{t0}

J_{t0} =1.7207E+15

$$J_t = \frac{4 \cdot J_{t0}}{D} = 6580.88$$

Risolviamo ora il sistema :

$$I(i,j) \cdot x_i = \Omega(i)$$

x_1	x_2	x_3	x_4		Ωi (m^2)
1050.00	**-300.00**	**0.00**	**-400.00**	=	**12.00**
-300.00	**1150.00**	**-400.00**	**-100.00**	=	**12.00**
0.00	**-400.00**	**1016.67**	**0.00**	=	**12.00**
-400.00	**-100.00**	**0.00**	**1283.33**	=	**20.00**

che da come soluzione:

x_1	0.02995
x_2	0.02863
x_3	0.02307
x_4	0.02715

La costante d'inerzia torsionale:

J=4*x(i)* Ω(i)

1.437748319
1.374414422
1.107310592
2.17213087

6.091604203 m^4

A qusto punto è possibile calcolare i flussi di maglia pari a:

$$f(i) = \frac{C(i)}{2 \cdot J_{t0}} \cdot M_t$$

$$\tau(i) = \frac{f(i)}{\delta(i)}$$ per le aste di maglia non comuni ad altre maglie

$$\tau(i) = \frac{f(i) - f(j)}{\delta(i, j)}$$ per le aste di confine comuni tra la maglia i e j

Mt=100000 KN

Sollecitazioni

Maglia	f (daN/cm)
1	983.42
2	940.10
3	757.40
4	891.44

Segm.	τ_{tors} (daN/cm²)
1	491.71
2	470.05
3	378.70
4	491.71
5	43.32
6	182.70
7	504.93
8	91.98
9	-48.66
10	626.73
11	504.93
12	445.72
13	594.30
14	594.30

2.3 IL CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI TAGLIANTI NELLE SEZIONI PLURICONNESSE

Supponiamo di avere una sezione pluricellulare composta da N celle come da figura sottostante, avendo indicato con G il baricentro della sezione intera e C il centro di taglio.
Per calcolare le tensioni in ogni tratto e le coordinate del centro di taglio se non precedentemente calcolato per esempio con il metodo Attard -Murray, operiamo in questa maniera:

Passo 1: rendiamo staticamente determinata la sezione operando N tagli, uno per ogni cella, trasformando ogni cella in un insieme di aste formante un profilo aperto. La struttura diventa monoconnessa ed è possibile calcolare le tensioni tangenziali.

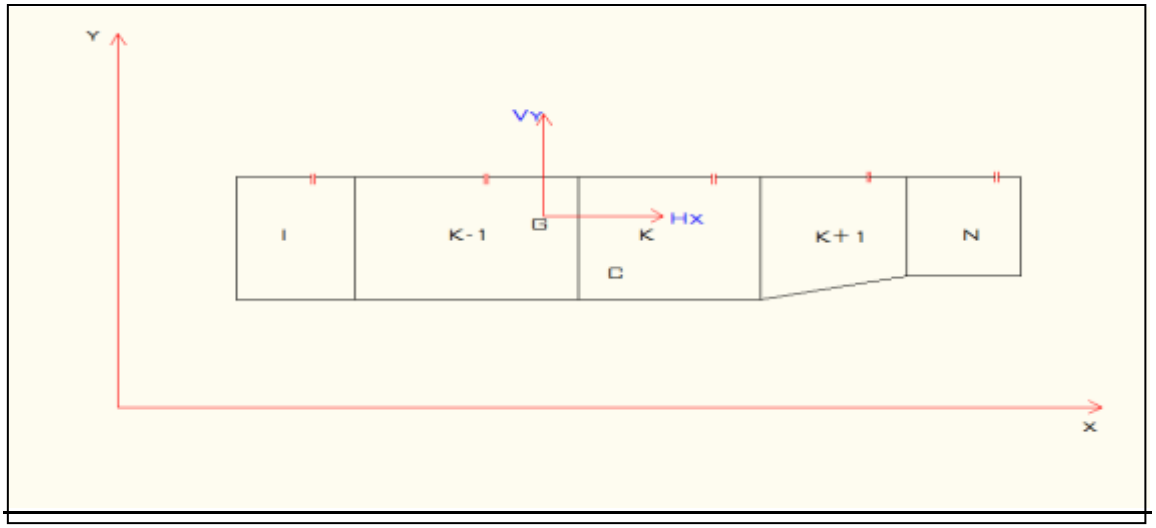


Figura 23

Passo 2: nota la direzione dei flussi di taglio in ogni singolo braccio della sezione, il calcolo della tensione tangenziale in ogni tratto di un profilo aperto è dato dalla seguente nota formula di Jourawsky generalizzata applicata prima con Vy≠0 e Hx=0 e poi con Vy=0 e Hx≠0:

$$\tau = \frac{1}{t}\left[\frac{(V_y \cdot I_{xy} - H_x \cdot I_x)\cdot Q_y}{B} + \frac{(H_x \cdot I_{xy} - V_y \cdot I_y)\cdot Q_x}{B}\right] \qquad (5)$$

Avendo indicato con:

H_x = Taglio orizzontale positivo se diretto verso destra
V_y = Taglio verticale positivo se diretto verso l'alto
I_x = Momento di inerzia x dell'intera sezione
I_y = Momento di inerzia y dell'intera sezione
I_{xy} = Momento di inerzia centrifugo dell'intera sezione
B = $I_x \cdot I_y - I_{xy}^2$
t = spessore di ogni asta/braccio

$$Q_x = \int_0^s y(s)dA \qquad Q_y = \int_0^s x(s)dA$$

dove i termini x(s) e y(s) che compaiono nei momenti statici Qx e Qy sono le funzioni di distribuzione delle coordinate y e x di ogni singolo tratto rispetto al baricentro della sezione intera, che chiameremo coordinate settoriali della linea media.
Il calcolo delle coordinate settoriali è stato dettagliatamente spiegato al capitolo I.
Applicando la (5) Nel caso di sezione simmetrica per esempio rispetto a x e Hx=0 si ritrova la formula classica di Jourawsky

$$\tau = \frac{V_y \cdot S_x}{t \cdot I_x}$$

Passo 3: È necessario correggere le tensioni imponendo la congruenza in ogni singolo nodo tra le tensioni entranti ed uscenti.
Passo 4: si applica in ogni maglia il teorema di Stokes $\int_{mi} \tau ds = 0$ L'integrale può essere suddiviso in due parti, la prima dovute alle tensioni sopra calcolate della sezione resa monoconnessa, la seconda dovuta alle tensioni incognite correttive dovute al fatto che la maglia è chiusa.
Per esempio nella maglia k indicato con:

$q_k=\tau_k \cdot t_k$ flusso incognito nella maglia k
$q_{k-1}=\tau_{k-1} \cdot 1t_{k-1}$ flusso incognito nella maglia k-1 adiacente alla maglia k
$q_{k+1}=\tau_{k+1} \cdot 1t_{k+1}$ flusso incognito nella maglia k+1 adiacente alla maglia k
$L_{k-1,k}/t_{k-1,k}$ rapporto lunghezza spessore dell' asta di confine tra la maglia k e k-1
$L_{k+1,k}/t_{k+1,k}$ rapporto lunghezza spessore dell' asta di confine tra la maglia k e k+1
$\sum_{i=1}^{nk} \frac{L_{ki}}{t_{ki}}$ somma dei rapporti tra la lunghezza di ogni tratto ed il suo spessore relativa alla maglia k
$\sum_{i=1}^{nk} q_k^*$ somma delle tensioni della maglia k di cui al passo 2 moltiplicate per lo spessore
Per ogni maglia m scriveremo m equazioni in m incognite q

$$-q_{k-1} \cdot \frac{L_{k-1,k}}{t_{k-1,k}} + q_k \cdot \sum_{i=1}^{nk} \frac{L_k}{t_k} - q_{k+1} \cdot \frac{L_{k+1,k}}{t_{k+1,k}} = \sum_{i=1}^{nk} q_k^*$$

Passo 4: Ottenute le tensioni tangenziali in ogni tratto, si calcoleranno le risultanti Fixe Fiy, le distanze da un punto del piano alle rette di Fix e di Fiy e quindi le coordinate del centro di taglio:
x_C= Fix·d/Hx
y_C= Fiy·d/Vy

ESEMPIO APPLICATIVO

Si esegue il calcolo della seguente sezione tratta dal Franciosi "*Problemi di scienze delle costruzioni*" Vol II cap VIII pag. 626 appendice II figura 37(vedi Archivio sezioni n.4).

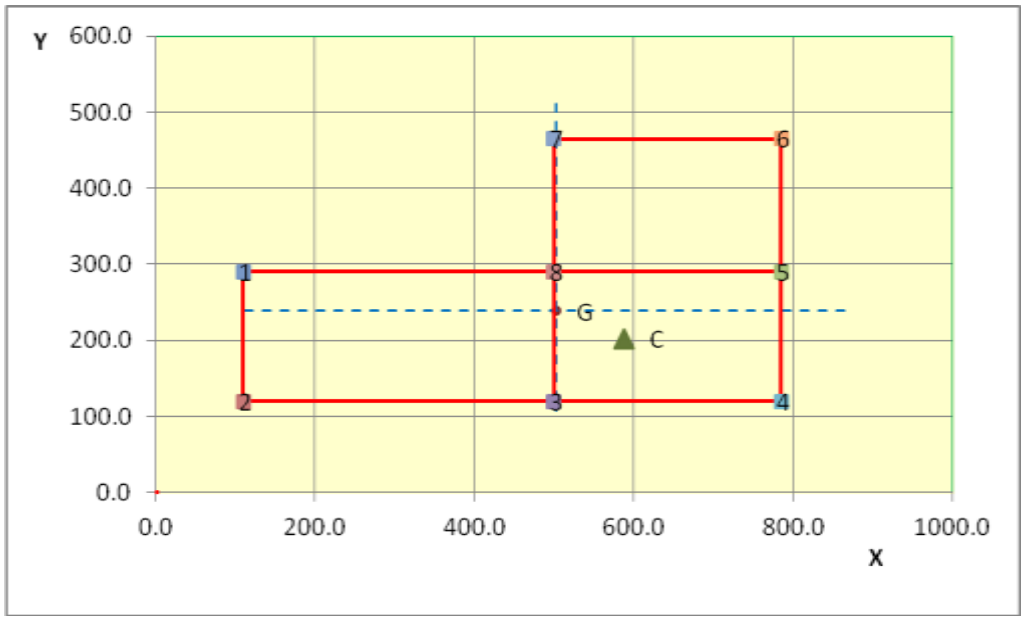


Figura 24

Nella tabella seguente sono indicate le coordinate dei nodi, le aste con i nodi di appartenenza, gli spessori di ogni asta, il numero di maglia a cui appartiene ogni asta e i tagli nelle aste in prossimità del nodo a sinistra(s) o a destra(d). Se l'asta appartiene a 2 maglie si indicano entrambi i numeri delle maglie separate da una virgola.

Coordinate dei nodi			maglia	Tipologia elementi				Interruzione
Nodo	X (cm)	Y (cm)	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore	s/d
1	110.000	290.000	3	1	1	2	20.000	
2	110.000	120.000	3	2	2	3	40.000	
3	500.000	120.000	2	3	3	4	40.000	d
4	785.000	120.000	2	4	4	5	30.000	
5	785.000	290.000	1	5	5	6	20.000	d
6	785.000	465.000	1	6	6	7	30.000	
7	500.000	465.000	3	7	8	1	20.000	
8	500.000	290.000	1	8	7	8	20.000	
			2,3	9	8	3	20.000	d
			1,2	10	8	5	20.000	

I percorsi individuati:

path	nodi				
1	4	3	2	1	8
2	6	5			
3	4	5			
4	6	7	8		
5	3	8			
6	5	8			

Le caratteristiche geometriche ed inerziali della sezione:

Origine nel baricentro					
A =	67950.00	cm²	H =	345.000	cm
P =	2495.00	cm	W =	675.000	cm
x_G =	503.20	cm	S_x^{top}=		
y_G =	238.60	cm	S_x^{bot}=		
I_x =	1053396481.79	cm⁴	S_y^{right}=		
I_y =	3096677456.54	cm⁴	S_y^{left}=		
I_{xy} =	541794983.44	cm⁴			
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	13.97	gradi	ρ_x =	116.27	cm
I_{xp} =	918623941.94	cm⁴	ρ_y =	218.07	cm³
I_{yp} =	3231449996.39	cm⁴	W_{plx}=		cm³
I_p =	3608278954.88	cm⁴	W_{ply}=		cm³

Le coordinate rispetto agli assi principali:

$$x' = (x - x_G)\cos\varphi + (y - y_G)sen\varphi$$
$$y' = (x - x_G)sen\varphi + (y - y_G)\cos\varphi$$

Nodo	X (cm)	Y (cm)
1	-369.16	144.80
2	-410.20	-20.18
3	-31.73	-114.32
4	244.84	-183.12
5	285.88	-18.14
6	328.12	151.68
7	51.55	220.48
8	9.31	50.65

Sollecitazione nella sezione:

Hx =0.00 N

Vy= 1000 kN

B = Ix·Iy-Ixy2

B=2.97E+18 cm^8

$ax=(H_x \cdot I_{xy}-V_y \cdot I_y)/B$ $ay=(-H_x \cdot I_{x+}V_y \cdot I_{yx})/B$

$ax=-1.09E-10^{-3}$ N/cm^4

ay=0

α=ax·c1y+ay·c1x β=ax·c2y+ay·c2x

$\Delta q=\alpha \cdot L^2+\beta \cdot L$

coordinate rispetto al baricentro

Seg.	Nodo i	Nodo j	t (cm)	Lk (cm)	xi (cm)	yi (cm)	xj (cm)	yj (cm)	xi' (cm)	yi' (cm)	xj' (cm)	yj' (cm)
1	2	1	20.00	170.000	-410.20	-20.18	-369.16	144.80	-410.20	-20.18	-369.16	144.80
2	3	2	40.00	390.000	-31.73	-114.32	-410.20	-20.18	-31.73	-114.32	-410.20	-20.18
3	4	3	40.00	285.000	244.84	-183.12	-31.73	-114.32	244.84	-183.12	-31.73	-114.32
4	4	5	30.00	170.000	244.84	-183.12	285.88	-18.14	244.84	-183.12	285.88	-18.14
5	6	5	20.00	175.000	328.12	151.68	285.88	-18.14	328.12	151.68	285.88	-18.14
6	6	7	30.00	285.000	328.12	151.68	51.55	220.48	328.12	151.68	51.55	220.48
7	1	8	20.00	390.000	-369.16	144.80	9.31	50.65	-369.16	144.80	9.31	50.65
8	7	8	20.00	175.000	51.55	220.48	9.31	50.65	51.55	220.48	9.31	50.65
9	3	8	20.00	170.000	-31.73	-114.32	9.31	50.65	-31.73	-114.32	9.31	50.65
10	5	8	20.00	285.000	285.88	-18.14	9.31	50.65	285.88	-18.14	9.31	50.65

Seg.	Nodo	Nodo	coord. Taglio				Qy		Qx		ΔQ
	i	j	mx	qx	my	qy	c1x (s^2)	c2x (s)	c1y (s^2)	c2y (s)	N/cm
1	7	1	0.121	-410.196	0.485	-20.175	2.414	-8203.928	9.704	-403.506	-230.625
2	7	2	-0.485	-31.730	0.121	-114.320	-19.409	-1269.198	4.828	-4572.782	1141.991
3	3	2	-0.485	244.842	0.121	-183.117	-19.409	9793.668	4.828	-7324.691	1845.576
4	4	5	0.121	244.842	0.485	-183.117	3.621	7345.251	14.556	-5493.519	558.681
5	6	5	-0.121	328.123	-0.485	151.680	-2.414	6562.463	-9.704	3033.599	-254.388
6	1	4	-0.485	328.123	0.121	151.680	-14.556	9843.694	3.621	-4550.399	-1731.910
7	2	5	0.485	-369.159	-0.121	144.797	9.704	-7383.183	-2.414	2895.945	-829.780
8	3	9	-0.121	51.552	-0.485	220.478	-2.414	1031.030	-9.704	4409.554	-516.510
9	9	6	0.121	-31.730	0.485	-114.320	2.414	-634.599	9.704	-2286.391	117.821
10	8	7	-0.485	285.879	0.121	-18.145	-9.704	5717.579	2.414	-362.895	-100.856

I valori del flusso iniziale qi e finale qj di ogni tratto si ricavano da Δq rispettando la congruenza tra il flusso entrante ed uscente in ogni nodo ed assegnano qi=0 all'inizio del percorso. L'unico nodo da variare è il nodo 5.
Indicando con $q_{segm,nodo}$ il valore del flusso del segmento 10 relativo al nodo 5 avremo:
$q_{10,5}=q_{4,5}+q_{5,5}$ (vedi sfondo giallo e verde)

path	aste	nodo i	nodo j	qi N/cm	qj N/cm
1	3	4	3	0.000	1845.576
	2	3	2	1845.576	2987.566
	1	2	1	2987.566	2756.942
	7	1	8	2756.942	1927.161
2	5	6	5	0.000	-254.388
3	4	4	5	0.000	558.681
4	6	6	7	0.000	-1731.910
	8	7	8	-1731.910	-2248.420
5	9	3	8	0.000	117.821
6	10	5	8	304.294	203.438

Si calcolano le risultanti dei flussi nei tratti dovuti alla sezione resa monoconnessa.
La risultante $F=1/3\cdot\alpha\cdot L^3+0.5\cdot\beta\cdot L^2$ in ogni tratto:

	F (N)
1	-10953.006
2	274647.560
3	283271.586
4	60463.053
5	-31694.927
6	-231589.385
7	-187786.839
8	-54630.649
9	18664.870
10	-4233.430

Calcoliamo ora i coefficienti del sistema per ricavare le q incognite che ripristinano la congruenza all'interno di ogni maglia per effetto dei tagli.

$q_{i,i}=\sum_{i=1}^{nk}\frac{L_{ki}}{t_{ki}}$ $\qquad$ $q_{i,j}=L_{i,j}/t_{i,j}$

maglia	L/t
1,2	14.250
2,3	8.500

maglia	L/t	maglia	L/t	maglia	L/t
1	8.750	2	7.125	3	8.500
	9.500		5.667		9.750
	8.750		8.500		19.500
	14.250		14.250		8.500
totale	**41.250**	totale	**35.542**	totale	**46.250**

I termini noti del sistema si trovano:

q*=(qi·L+F)/t
Si sommano per ogni maglia i valori di q* ognuno con il suo segno determinato in funzione del verso orario o antiorario di q* rispetto al centro della maglia.

maglia	segm.	nodo i	nodo j	qi N/cm	L (cm)	t (cm)	q* N/cm
1	5	6	5	0.000	175.000	20.000	1584.746
	6	6	7	0.000	285.000	30.000	-7719.646
	8	7	8	-1731.910	175.000	20.000	-17885.745
	10	5	8	304.294	285.000	20.000	-4124.514
							-28145.158
2	3	4	3	0.000	285.000	40.000	-7081.790
	4	4	5	0.000	170.000	30.000	2015.435
	9	3	8	0.000	170.000	20.000	-933.243
	10	5	8	304.294	285.000	20.000	4124.514
							-1875.085
3	1	2	1	2987.566	170.000	20.000	-24846.663
	2	3	2	1845.576	390.000	40.000	-24860.552
	7	1	8	2756.942	390.000	20.000	-44371.021
	9	3	8	0.000	170.000	20.000	933.243
							-93144.993

Il sistema per ricavare i valori di q incogniti:

41.25 q1-14.25 q2 = 28145.185
-14.25 q1+35.54 q2-8.5 q3 = 1875.085
-8.5 q2+46.25 q3 = 93144.933

q1 = 1023.72 N/cm
q2 = 988.21 N/cm
q3 = 2195.58 N/cm

Il flusso totale sarà qtot=qmaglia+qi dove qmaglia sono le q1, q2, q3 trovate con il sistema e qi il flusso iniziale del tratto trovato con la sezione resa monoconnessa dai tagli.

La tensione τ in ogni tratto sarà data da τ=qtot/t e nelle aste di confine
La tensione $\tau_{1,2}$=(q1-q2)/$t_{1,2}$ +qi
La tensione $\tau_{2,3}$=(q2-q3)/$t_{2,3}$ +qi

aste	cella	qi N/cm	qj N/cm	t (cm)	ti N/cm2	tj N/cm2

3	2	-988.289	857.287	40.000	-24.707	21.432
2	3	-350.002	791.989	40.000	-8.750	19.800
1	3	791.989	561.364	20.000	39.599	28.068
7	3	561.364	-268.416	20.000	28.068	-13.421
5	1	-1023.716	-1278.104	20.000	-51.186	-63.905
4	2	988.289	1546.971	30.000	32.943	51.566
6	1	1023.716	-708.194	30.000	34.124	-23.606
8	1	-708.194	-1224.704	20.000	-35.410	-61.235
9	2,3	1207.288	1325.109	20.000	60.364	66.255
10	1,2	268.867	168.011	20.000	13.443	8.401

Come ultimo passo calcoliamo le coordinate del centro di taglio calcolando i momenti Mi
Mi=(F+qi·L)·r Mtot=∑Mi dx=Mtot/Vy

Calcolo centro taglio

aste	Fi N	qi*L N/cm	Ftot N	nodo i	nodo j	r (cm)	M N/cm
3	283271.586	-281662.396	1609.190	4	3	118.598	-190847.086
2	274647.560	-136500.627	138146.933	3	2	118.598	-16383982.288
1	-10953.006	134638.133	123685.127	2	1	393.195	-48632418.582
7	-187786.839	218932.107	31145.268	1	8	51.402	-1600921.786
5	-31694.927	-179150.270	-210845.197	6	5	281.805	59417154.025
4	60463.053	168009.149	228472.202	4	5	281.805	64384525.712
6	-231589.385	291759.012	60169.627	6	7	226.402	13622509.715
8	-54630.649	-123933.977	-178564.626	7	8	3.195	-570579.021
9	18664.870	205238.992	223903.862	3	8	3.195	-715454.393
10	-4233.430	76627.085	72393.655	5	8	51.402	3721161.728
							73.051

Ripetendo il ragionamento con Hx=100 kN Vy=0 si trova: dy=-56.008 cm
Riportando sugli assi originari si trovano le coordinate in cm del centro di taglio:

$$x_C = d_x \cos\varphi - d_y sen\varphi + x_G$$

$$y_C = d_x sen\varphi + d_y \cos\varphi + y_G$$

$$x_C = 587.60624$$

$$y_C = 201.88077$$

3 LA TORSIONE NON UNIFORME

3.1 LA TORSIONE NON UNIFORME

Se indichiamo con w(z) la componente di deformazione della trave dovuta ad ingobbamento, si possono presentare due casi:

a) Variazione di $\frac{dw(z)}{dz} = 0 \rightarrow w(z) = \cos t$

È cioè quando tutte le sezioni della trave sono sollecitate dalla stessa azione torcente interna onde per cui subiscono tutte la stessa deformazione e sono libere di ingobbarsi. Non ci sono quindi tensioni normali durante il fenomeno dell'ingobbamento: è la **TORSIONE PURA** o **TORSIONE PRIMARIA** o **TORSIONE DI SAINT VENANT.**

In questo caso l'angolo unitario di torsione sarà pari a:

$$\theta'(z) = \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{M_t}{G \cdot J_t} \rightarrow \vartheta(z) = \frac{M_t}{G \cdot J_t} z + \vartheta_0$$

$$w(s) = \vartheta' \cdot \omega(s)$$

b) Variazione di $\frac{dw(z)}{dz} \neq 0 \rightarrow w(z) \neq \cos t$

In questo caso essendo le dilatazioni lungo l'asse della trave diverse da zero, risulteranno anche delle tensioni normali diverse da zero e per essere equilibrate, dovranno sorgere anche tensioni tangenziali.

$$\sigma(z) \neq 0 \rightarrow \tau(z) \neq 0$$

Questo comportamento si verifica quando il momento torcente esterno è variabile o quando qualche sezione della trave è vincolata in modo da non ingobbarsi; si parla allora di **TORSIONE NON UNIFORME** o **TORSIONE SECONDARIA** o **TORSIONE ALLA VLASOV.** In questo caso l'angolo unitario di torsione sarà pari a:

$$\theta'(z) = \frac{M_t(z)}{G \cdot J_t}$$

$$w(z,s) = \vartheta'(z) \cdot \omega(s)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw(z)}{dz} = \vartheta''(z) \cdot \omega(s) \rightarrow \sigma(z) = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot \vartheta''(z) \cdot \omega(s)$$

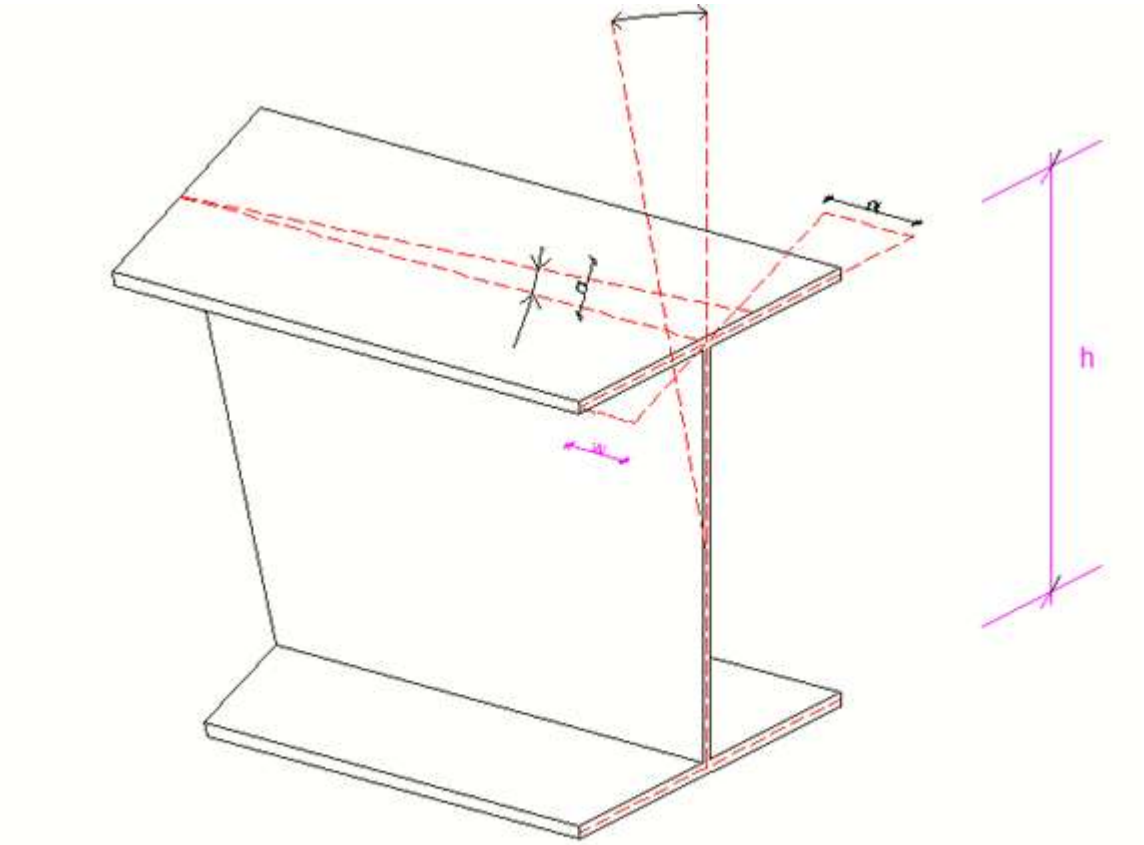


Figura 25

Consideriamo un elemento infinitesimo di trave, dove per quanto sopra indicato avremo delle tensioni normali variabili con z e per equilibrio delle tensioni tangenziali secondarie.

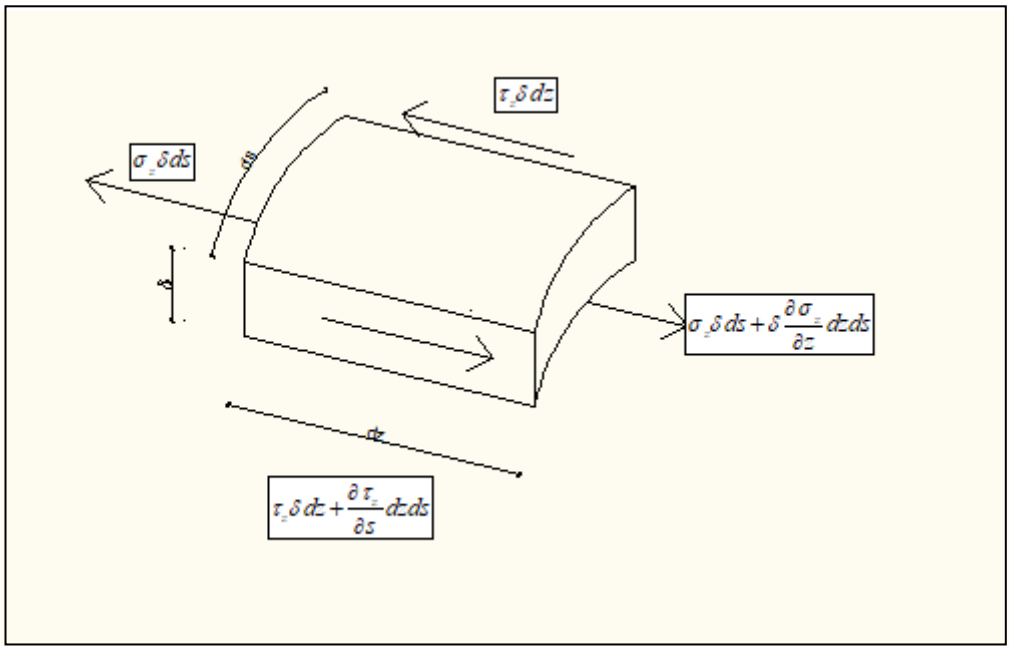


Figura 26

Con riferimento alla figura 26 per equilibrio lungo z:

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial s} \delta dzds = -\delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dzds$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial s} \delta = -\delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -E \cdot \vartheta'''(z) \cdot \omega(s) \cdot \delta$$

Integrando e indicando con h(s) la distanza dal centro di taglio alla linea media s della sezione avremo:

$$\tau_z(z,s) \cdot \delta = \int_0^s -E \cdot \vartheta'''(z) \cdot \omega(s) \cdot \delta ds$$

Integrando le tensioni tangenziali lungo la linea media avremo come risultante un momento M_ω dovuto alle tensioni secondarie:

$$M_\omega = \int \tau(z,s) \cdot \delta \cdot h(s) \cdot ds = -E \cdot \vartheta'''(z) \cdot \int h(s) \cdot \int \delta \cdot \omega(t) \cdot ds \cdot dt$$

$$M_\omega = -E \cdot \vartheta'''(z) \cdot \int h(s) ds \int_0^s \delta \cdot \omega(t) dt$$

ma

$$d\omega(s)ds = h(s)ds$$

$$M_\omega = -E \cdot \vartheta'''(z) \int \delta \cdot \omega^2(s)ds$$

Ricordando che:

$I_\omega = \int \delta \cdot \omega^2(s)ds$ è la COSTANTE DI INGOBBAMENTO o MOMENTO DI INERZIA SETTORIALE

$$M_\omega = E \cdot \vartheta'''(z) \cdot I_\omega$$

Il momento torcente totale sarà la somma del momento torcente primario Mp e di quello secondario:

$$M = M_P + M_\omega$$

L'equazione differenziale della torsione mista sarà quindi:

$$\boxed{E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^3\vartheta}{dz^3} - G \cdot J_t \cdot \frac{d\vartheta}{dz} = -M}$$

3.2 CARATTERISTICA BIMOMENTO

La tensione normale dovuta alla torsione non uniforme è descritta da una particolare caratteristica della azione interna che è chiamata bimomento ed è definito dall'espressione:

$$B(z) = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2}$$

Poiché nell'espressione differenziale generale della torsione mista il momento secondario è dato da:

$$M_\omega = EI_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3}$$ ne consegue che

$$M_\omega = \frac{dB(z)}{dz}$$

e quindi il momento secondario è individuato in ogni sezione della trave non appena si conosce la variazione del bimomento rispetto all'asse longitudinale della trave.

È bene notare che le torsioni provocate dalla torsione secondaria non sono necessariamente indotta dall'esistenza di sollecitazioni esterne torsionali, ma possono nascere da condizioni di carico qualsiasi.

Per una sezione a **I** il bimomento si scrive

$$B = M_F h$$

M_F momento di flangia

Nell'ala si avrà una σ data dalla formula

$$\sigma_z = \frac{M_F}{I_y / 2} x = \frac{M_F}{\frac{I_y}{2}} \frac{xh^2}{2\frac{h^2}{2}} = \frac{M_F h}{\frac{I_y}{2}\frac{h^2}{2}} x \frac{h}{2}$$

$$\sigma_z = \sigma_\omega = \frac{B}{\frac{I_y}{2}\frac{h^2}{2}} x \frac{h}{2}$$

$$I_\omega = \frac{I_y h^2}{4} \qquad \omega = x\frac{h}{2}$$

$$\sigma_z = \sigma_{\omega_{(s)}} = \frac{B \cdot \omega(s)}{I_\omega}$$

che è una formula generale per il calcolo delle tensioni lungo l'asse longitudinale della trave dovuto da un Bimomento

Allo stesso risultato in formula generale si arriva da:

$$\sigma_z = E\varepsilon_Z = E \cdot \Theta''(z) \cdot \omega(s)$$

$$M_\omega = E\Theta'''(z) I_\omega$$

$$M_\omega = \frac{dB(z)}{dz}$$

uguagliando ed integrando

$$B(z) = E\Theta''(z) \cdot I_\omega = \frac{EI_\omega \sigma_Z}{E\omega(s)}$$

$$\sigma_z = \frac{B(z)\omega(s)}{I_\omega}$$

Si può notare come la formula precedente è del tutto analoga alla formula di Navier per la flessione semplice.
Nella flessione semplice il momento flettente si può definire come prodotto da 2 forze parallele uguali e opposte, mentre nella torsione non uniforme il bimomento è definito da 2 coppie uguali e opposte agenti in piani paralleli. Rimandando a testi più completi per la dimostrazione si può determinare come le le tensioni tangenziali siano date dalla seguente formula:

$$\tau_\omega(s) = \frac{M_\omega \cdot S_\omega(s)}{I_\omega \delta}$$

dove

$$S_\omega = \int_0^s \omega \cdot dA$$

è il momento statico settoriale, e la tensione tangenziale è del tutto analoga alla formula del taglio di JOUROWSKY per le sezioni sottili aperte.

3.3 LUNGHEZZA DIMENSIONALE CARATTERISTICA

E' utile introdurre il valore:

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$$ il cui inverso si definisce LUNGHEZZA CARATTERISTICA

e indicando con

$Kp = GIt =$ RIGIDEZZA TORSIONALE PRIMARIA

$K_\omega = EI_\omega =$ RIGIDEZZA TORSIONALE SECONDARIA

$$\alpha = \sqrt{\frac{Kp}{K_\omega}}$$

L'equazione differenziale generale della torsione derivando rispetto a Z diventa

$$\frac{d^3\theta}{dz^3} - \alpha^2 \frac{d\theta}{dz} = -M$$

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} - \alpha^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{mt}{K_\omega}$$ equivalente $EI_\omega \frac{d^4\theta}{dz^4} - GIt \frac{d^2\theta}{dz^2} = mt$

dove $mt = -\frac{dM}{dz}$ è il momento torcente distribuito

3.4 RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE GENERALE

Come sopra indicato l'equazione generale:

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} - \alpha^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{mt(z)}{K_\omega}$$

e detto $\overline{\theta}(z)$ l'integrale particolare che è funzione delle condizioni di carico e a,b,c,d le costanti di integrazione, l'integrale generale:

$$\theta(z) = \alpha\ senh(\alpha z) + b\cosh(\alpha z) + \alpha b senh(\alpha z) + c + \overline{\theta}(z)$$

le costanti a,b,c,d si trovano imponendo le condizioni al contorno:

A) APPOGGI TORSIONALI cioè elementi che impediscono le rotazioni ma consentono gli ingobbamenti

$$\theta(z) = 0 \quad \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0$$

B) INCASTRI TORSIONALI cioè elementi che impediscono sia le rotazioni che gli ingobbamenti

$$\theta(z) = 0 \quad \frac{d\theta}{dz} = 0$$

C) SEZIONE LIBERA (MENSOLA)

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = 0 \quad M_z = 0$$

3.5 TRAVE APPOGGIATA TORSIONALMENTE E SOLLECITATA DA UN MOMENTO TORCENTE UNIFORME

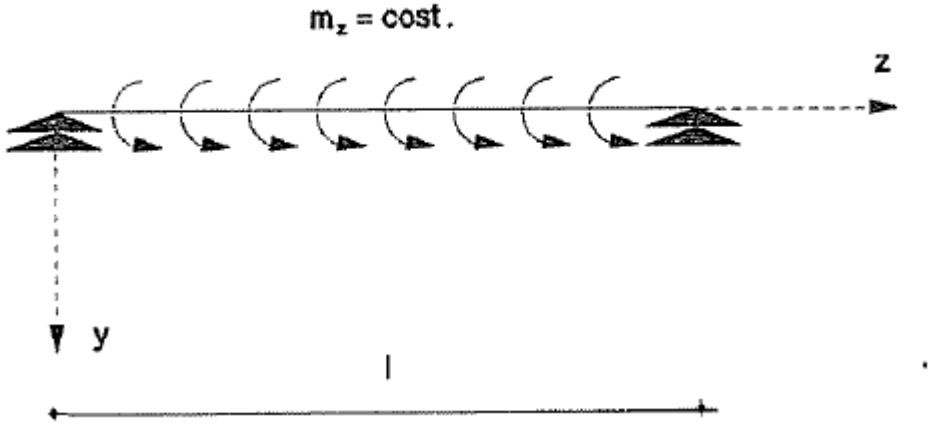


Figura 27

L'equazione

$$\frac{d^3\theta}{dz^3} - \alpha^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{mt}{K_\omega}$$

ha integrale particolare:

$$\bar{\theta}(z) = -\frac{mt}{K_p}\frac{z^2}{2}$$

e l'integrale generale:

$$\theta(z) = \alpha senh(\alpha z) + b\cosh(\alpha z) + cz + d - \frac{m_t \cdot z^2}{K_\omega 2\alpha^2}$$

Le condizioni al contrario:

$$\theta(z=0) = 0 \quad b + d = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(z=0) = 0 \qquad b\alpha^2 - \frac{m_t}{K_p} = 0$$

$$\theta(z=L) = 0 \qquad \alpha senh(\alpha L) + b\cosh(\alpha L) + cL + d - \frac{m_t L^2}{K_P 2} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(z=L) = 0 \qquad a\alpha^2 senh(\alpha L) + b\alpha^2\cosh(\alpha L) - \frac{m_t}{K_P} = 0$$

La soluzione risolvendo il sistema:

$$\theta(z) = \frac{m_t}{\alpha^2 K_p}\left[-t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\cdot senh(\alpha z) + \cosh(\alpha z).(L-z) - 1\right]$$

$$\theta(z=0) = 0 \quad \theta(z=L) = 0$$

$$\theta\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{m_t}{\alpha^2 K_p}\left[-t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\cdot senh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)+\cosh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)+\frac{\alpha^2 L^2}{8}-1\right]$$

Nota la rotazione, si trovano si trovano le funzioni del momento torcente primario e secondario:

$$M_P(z)=\frac{m_t}{\alpha}\left[-t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\cdot\cosh(\alpha z)+senh(\alpha z)+\frac{\alpha L}{2}-\alpha z\right]$$

$$M_\omega(z)=\frac{m_t}{\alpha}\left[t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\cdot\cosh(\alpha z)-senh(\alpha z)\right]$$

momenti che assumono i valori massimi nelle sezioni di estremità

$$M_p(z=0)=\frac{m_t}{\alpha}\left[\frac{\alpha L}{2}-t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\right]$$

$$M_\omega(z=0)=\frac{m_t}{\alpha}t\alpha nh\frac{\alpha L}{2}$$

$$B(0)=B(L)=0$$

$$M(z)=M_p(z)+M_\omega(z)=m_t\left(\frac{L}{2}-z\right)$$

il rapporto tra il momento torcente secondario e quello totale risulta nella sezione iniziale:

$$\frac{M_\omega(0)}{M(0)}=\frac{2}{\alpha L}t\alpha nh\frac{\alpha L}{2}$$

formula che evidenzia che il momento torcente secondario è inversamente proporzionale alla luce della trave onde per cui all'aumentare della luce il momento torcente secondario decresce a favore di quello primario a parità di condizioni.

Quindi la ripartizione tra il momento torcente primario e secondario dipende dal parametro αL e cioè dalla luce della trave L e dalla lunghezza caratteristica $\alpha=\sqrt{\frac{K_p}{K_\omega}}=\sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}}$

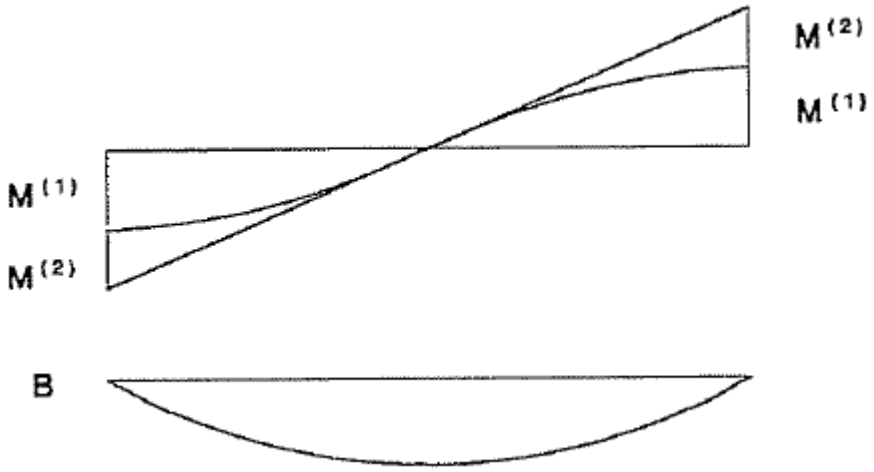


Figura 28

$$B(z) = \frac{m_t}{\alpha^2}\left[t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) senh(\alpha z) - \cosh(\alpha z) + 1 \right]$$

$$B\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{m_t}{\alpha^2}\left[t\alpha nh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) senh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) + 1 \right]$$

3.6 INDAGINE DI KOLLBRUNNER E BASLER

Kollbrunner e Basler nel lavoro "*Torsion in structures" Springer & Vertag Berlin"* 1969, hanno esaminato una serie di sezioni vincolate con appoggi torsionali e flessionali sottoposte a 3 condizioni di carico con luci usuali:

- momento torcente in mezzeria
- distribuzione uniforme di coppie torcenti
- 2 bimomenti applicati alle estremità delle travi.

I risultati sono stati riportati su un diagramma semi-logaritmico con in ascissa il parametro αL ed in ordinata il rapporto β tra il bimomento nella sezione di mezzeria funzione di αL ed il bimomento per $\alpha L = 0$ cioè torsione tutta secondaria (vedi figura 29)

$$\beta = \frac{B(\alpha L)}{B(0)}$$

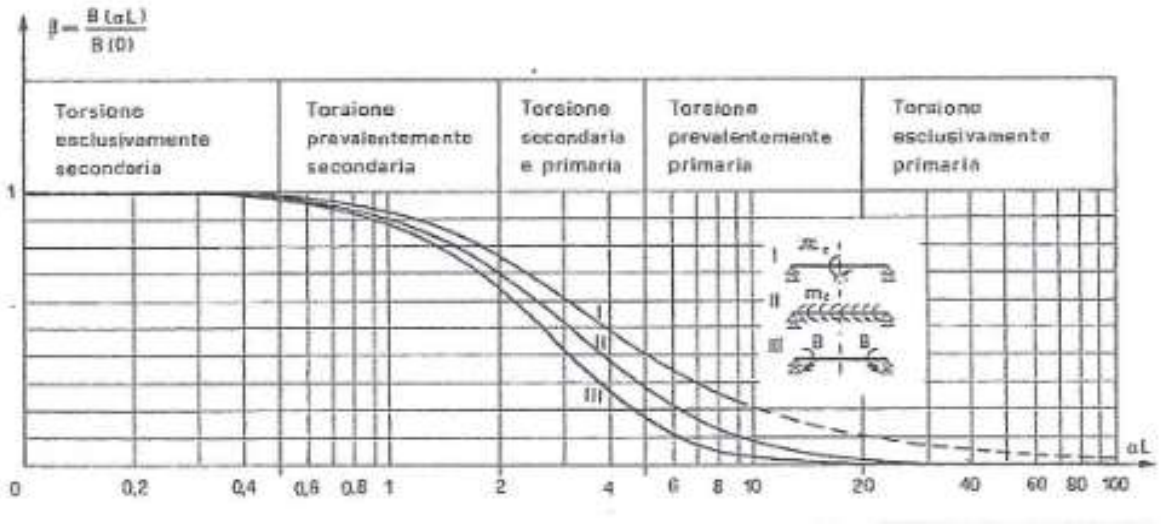


Figura 29

Un riassunto del comportamento delle varie sezioni è riportato nella seguente tabella:

α L	TIPO DI TORSIONE	SEZIONI
0÷0,5	ESCLUSIVAMENTE SECONDARIA	LAMINATE A FREDDO - MONOCONNESSE
0,5÷2,0	PREVALENTEMENTE SECONDARIA	PROFILI A I - VOLTE SOTTILI CILINDRICHE - IMPALCATI IN C.A. E C.A./ACCIAIO MONOCONNESSE
2.0÷5.0	EQUILIBRIO TRA PRIMARIA E SECONDARIA	TRAVI METALLICHE LAMINATE A CALDO - TEGOLONI IN C.A. E C.A.P. DI COPERTURA - IMPALCATI IN C.A.P.
5÷20	PRIMARIA PREVALENTE	SEZIONI TOZZE IN C.A.
20÷100	ESCLUSIVAMENTE PRIMARIA	SEZIONI COMPATTE - SEZIONI IN PARETE SOTTILE BI E PLURICONNESSE

3.7 ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA TORSIONE NON UNIFORME PER UN PROFILO IPE

Si prende l'esempio di calcolo dell'articolo " *Method for including restrained warping in tradizional frame analyses*" di P.C.J. Hoogenboom and A. Bogart (vedi Bibliografia 19) relativo ad una struttura per la segnalazione del traffico come quello indicata in figura 30, struttura costituita da profilati IPE 400
La struttura ha uno sbalzo di 3.00 mt con un vincolo torsionale che ne impedisce l'ingobbamento.

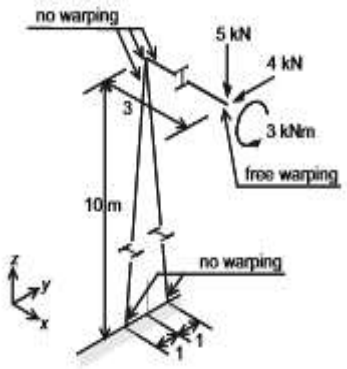


Figura 30

Applicando le definizioni note e i valori caratteristici ricavabili dal software

Materiale	**Acciaio**	
Modulo elastico E	**2100000**	daN/cm^2
Modulo di taglio G	**840000**	daN/cm^2
Costante torsionale J_{tors}	**44.92**	cm^4
Costante di ingobbamento $I\omega$	**490048.47**	cm^6
Luce della trave L	**300.00**	cm
Inserimento sezione da	**profili**	
codice profilo	**IPE 400**	

Rigidezza tors.le primaria K1	3.77E+07	daN cm^2
Rigidezza tors.le primaria K2	1.03E+12	daN cm^4

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt{\frac{G \cdot J_{tors}}{E \cdot I_\omega}}$$

Lunghezza caratteristica α	0.006	cm^{-1}
Rapporto α**L**	1.817	

Il bimomento è dato dalla formula

$$B_\omega = -E \cdot I_\omega \frac{d^2\vartheta}{dx^2}$$

E i momenti primari e secondari da:

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} = -k_2 \cdot \frac{d^3\vartheta}{dx^3} \qquad M_{SV} = k_1 \cdot \frac{d\vartheta}{dx}$$

Schema statico:
Mensola incastrata torsionalmente e caricata con una coppia torcente all'estremo libero di valore C=3 KNm

B_ω	Bi-momento (F·L^2)
M_{SV}	Momento principale di Saint Venant dovuto a torsione pura
M_ω	Momento secondario o da torsione non uniforme
M_{tot}	Momento totale somma di M_{SV} e di M_ω
M_{SV}/M_{tot}	Rapporto tra il momento principale e quello totale
M_ω/M_{tot}	Rapporto tra il momento secondario e quello totale
mz	Momento torcente uniforme sulla trave (F·L/L)
C	Coppia torcente

La seguente tabella si ricava dal foglio di calcolo "Sollecitazioni per Torsione non uniforme", così come i grafici di B_w, M_w, M_{SV} e M_{tot}.

In particolare:

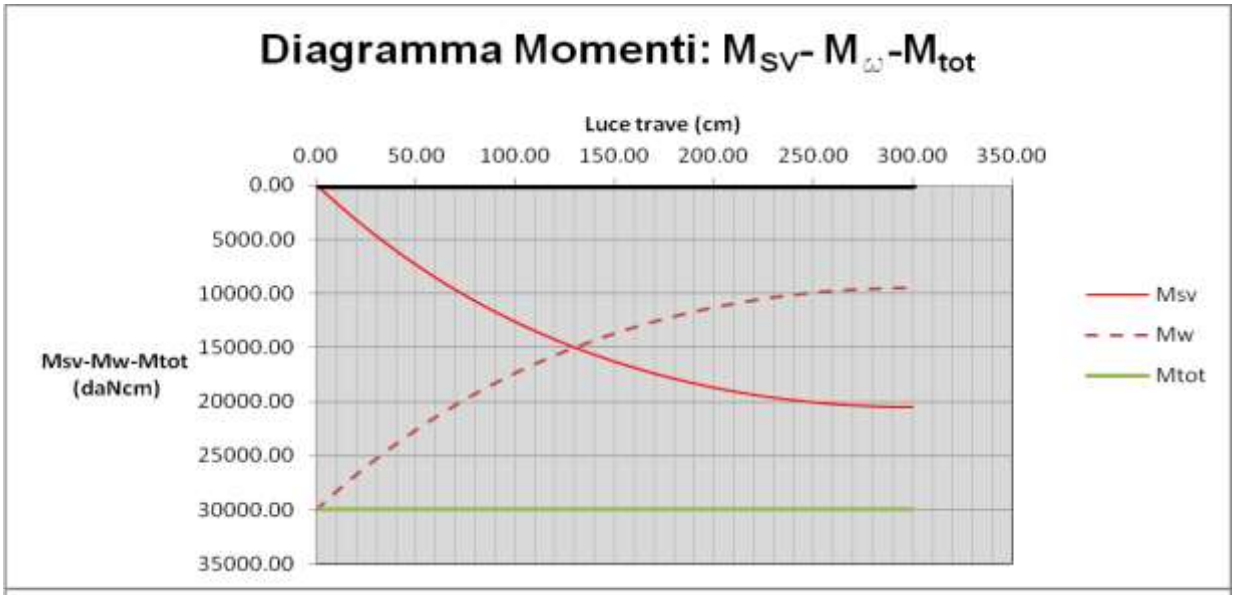
$$B_\omega = -\frac{C}{\alpha} \cdot \frac{senh\alpha(l-x)}{cosh\alpha l}$$

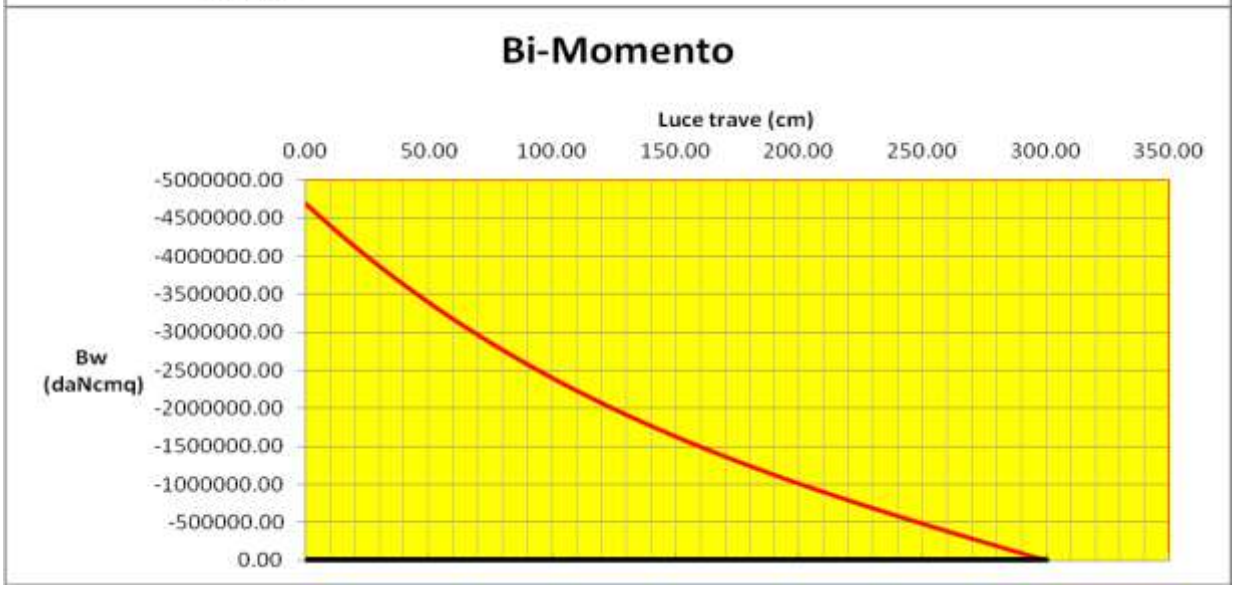
	x=0	x=L/2	x=L	Val.max	Val.min.
B_ω	-4699137.83	-1629766.10	0.00	0.00	-4699137.83
M_{SV}	0.00	16299.34	20496.61	20496.61	0.00
M_ω	30000.00	13700.66	9503.39	30000.00	9503.39
M_{tot}	30000.00	30000.00	30000.00	30000.00	30000.00
M_{SV}/M_{tot}	0.00	54.33	68.32	68.32	0.00
M_ω/M_{tot}	100.00	45.67	31.68	100.00	31.68

Tabella con i valori calcolati

z(cm)	B_ω daNcm^2	M_{SV} daNcm	M_ω daNcm	M_{tot} daNcm	M_{SV}/M %	M_ω/M %
0.00	-4699137.83	0.00	30000.00	30000.00	0.00	100.00
6.00	-4522200.06	1014.26	28985.74	30000.00	3.38	96.62
12.00	-4351232.37	1990.25	28009.75	30000.00	6.63	93.37
18.00	-4186009.05	2929.26	27070.74	30000.00	9.76	90.24
24.00	-4026311.98	3832.53	26167.47	30000.00	12.78	87.22
30.00	-3871930.34	4701.26	25298.74	30000.00	15.67	84.33
36.00	-3722660.30	5536.59	24463.41	30000.00	18.46	81.54
42.00	-3578304.82	6339.62	23660.38	30000.00	21.13	78.87
48.00	-3438673.30	7111.42	22888.58	30000.00	23.70	76.30
54.00	-3303581.43	7853.00	22147.00	30000.00	26.18	73.82
60.00	-3172850.85	8565.35	21434.65	30000.00	28.55	71.45
66.00	-3046308.98	9249.39	20750.61	30000.00	30.83	69.17
72.00	-2923788.76	9906.04	20093.96	30000.00	33.02	66.98
78.00	-2805128.44	10536.17	19463.83	30000.00	35.12	64.88
84.00	-2690171.37	11140.60	18859.40	30000.00	37.14	62.86
90.00	-2578765.79	11720.13	18279.87	30000.00	39.07	60.93
96.00	-2470764.62	12275.52	17724.48	30000.00	40.92	59.08
102.00	-2366025.28	12807.52	17192.48	30000.00	42.69	57.31
108.00	-2264409.50	13316.82	16683.18	30000.00	44.39	55.61
114.00	-2165783.13	13804.10	16195.90	30000.00	46.01	53.99
120.00	-2070015.97	14270.00	15730.00	30000.00	47.57	52.43
126.00	-1976981.58	14715.13	15284.87	30000.00	49.05	50.95
132.00	-1886557.15	15140.08	14859.92	30000.00	50.47	49.53
138.00	-1798623.29	15545.41	14454.59	30000.00	51.82	48.18
144.00	-1713063.92	15931.66	14068.34	30000.00	53.11	46.89

150.00	-1629766.10	16299.34	13700.66	30000.00	54.33	45.67
156.00	-1548619.84	16648.93	13351.07	30000.00	55.50	44.50
162.00	-1469518.03	16980.90	13019.10	30000.00	56.60	43.40
168.00	-1392356.23	17295.67	12704.33	30000.00	57.65	42.35
174.00	-1317032.58	17593.68	12406.32	30000.00	58.65	41.35
180.00	-1243447.64	17875.31	12124.69	30000.00	59.58	40.42
186.00	-1171504.27	18140.93	11859.07	30000.00	60.47	39.53
192.00	-1101107.48	18390.89	11609.11	30000.00	61.30	38.70
198.00	-1032164.34	18625.53	11374.47	30000.00	62.09	37.91
204.00	-964583.84	18845.15	11154.85	30000.00	62.82	37.18
210.00	-898276.75	19050.05	10949.95	30000.00	63.50	36.50
216.00	-833155.54	19240.49	10759.51	30000.00	64.13	35.87
222.00	-769134.24	19416.73	10583.27	30000.00	64.72	35.28
228.00	-706128.32	19578.99	10421.01	30000.00	65.26	34.74
234.00	-644054.62	19727.50	10272.50	30000.00	65.76	34.24
240.00	-582831.18	19862.44	10137.56	30000.00	66.21	33.79
246.00	-522377.18	19984.01	10015.99	30000.00	66.61	33.39
252.00	-462612.81	20092.34	9907.66	30000.00	66.97	33.03
258.00	-403459.16	20187.60	9812.40	30000.00	67.29	32.71
264.00	-344838.15	20269.91	9730.09	30000.00	67.57	32.43
270.00	-286672.38	20339.37	9660.63	30000.00	67.80	32.20
276.00	-228885.07	20396.08	9603.92	30000.00	67.99	32.01
282.00	-171399.93	20440.10	9559.90	30000.00	68.13	31.87
288.00	-114141.06	20471.51	9528.49	30000.00	68.24	31.76
294.00	-57032.89	20490.34	9509.66	30000.00	68.30	31.70
300.00	0.00	20496.61	9503.39	30000.00	68.32	31.68





Le formule per ricavare le tensioni dovute alla torsione non uniforme:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega}} \omega$$

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}}{t \cdot I_{\omega}}$$

ω = 179.93 cm^2 S_{ω} = 1056.59 cm^4 calcolati in maniera semplificata con il profilo tipo IPE 400 senza raccordi.

Tensioni dovute a torsione non uniforme

Bi-momento	B	-4699137.83	daN/cm^2 Z=0
Momento di ingobbamento M_ω		30000.00	daNcm Z=L
Costante di ingobbamento I_ω		490048.47	cm^6
Funzione di ingobbamento ω		179.93	cm^2
Mom. statico ingobbamento S_ω		1056.59	cm^4
σ_ω Tensione normale		1725.37	daN/cm^2 Z=0
τ_ω Tensione tangenz.le		47.91	daN/cm^2 Z=L

Si ricavano ora le tensioni dovute alla flessione, al taglio e al momento torcente

$$\sigma_{fless.} = \frac{N}{A} + \frac{-I_{xy}M_y + I_y M_x}{I_y I_x - I_{xy}^2} \cdot y_i + \frac{-I_{xy}M_x + I_x M_y}{I_y I_x - I_{xy}^2} \cdot x_i$$

$$\tau_{tors} = \frac{M_{torc} \cdot t}{J_t}$$

$$\tau = \frac{1}{t}\left[\frac{(V_y \cdot I_{xy} - H_x \cdot I_x) \cdot Q_y}{B} + \frac{(H_x \cdot I_{xy} - V_y \cdot I_y) \cdot Q_x}{B}\right]$$

$$Q_x = \int_0^s y(s)dA \qquad Q_y = \int_0^s x(s)dA \qquad B = I_x \cdot I_y - I_{xy}^2$$

$\sigma_{fless} = 951.22$ daN/cm^2

$\tau_{tors} = 901.60$ daN/cm^2

Calcolando la $\sigma id = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ si ha:

$\sigma id = 3113$ daN/cm^2 tenendo conto della torsione non uniforme

$\sigma id = 1852$ daN/ cm^2 calcolando le tensioni senza torsione non uniforme

3.8 ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA TORSIONE NON UNIFORME AD UN PROFILO CHIUSO

Con riferimento all'articolo citato nel paragrafo 3.7 (vedi anche "7 Vlasov torsion theory" di P.C.J. Hoogenboom October 2006), si esegue una verifica per la sezione di un ponte di 60 mt di luce in c.a. (figura 31) soggetta a una coppia torcente in mezzeria T di intensità pari a 269 x 10^5 Nm. La sezione ha dimensione come da figura 32 sotto riportata.

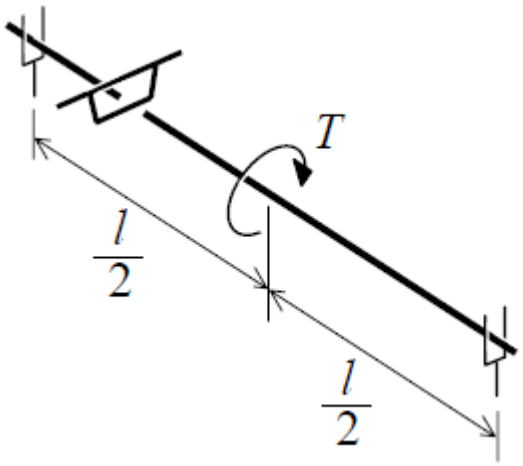


Figura 31

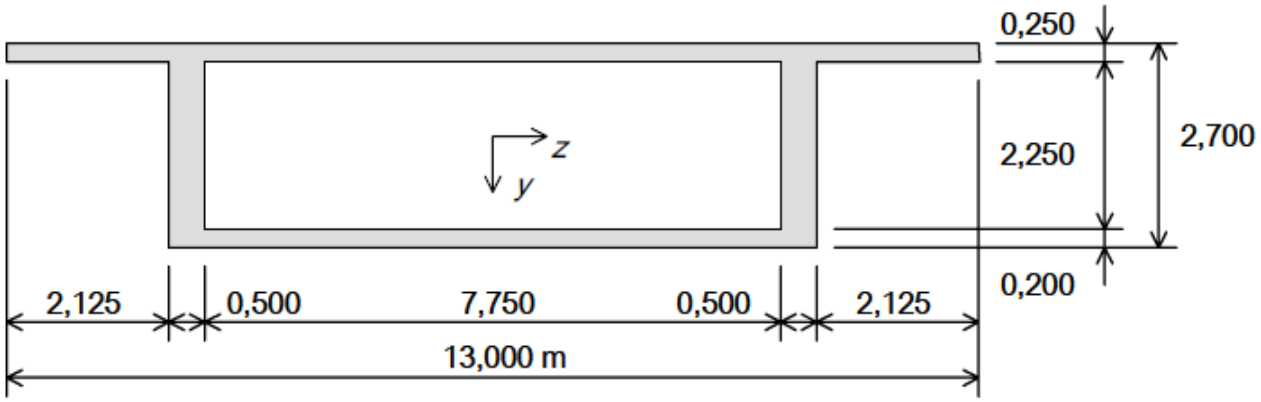


Figura 32

Le caratteristiche settoriali calcolate con il software allegato

Materiale	**c.a.**	
Modulo elastico E	**3000000**	daN/cm^2
Modulo di taglio G	**130435**	daN/cm^2

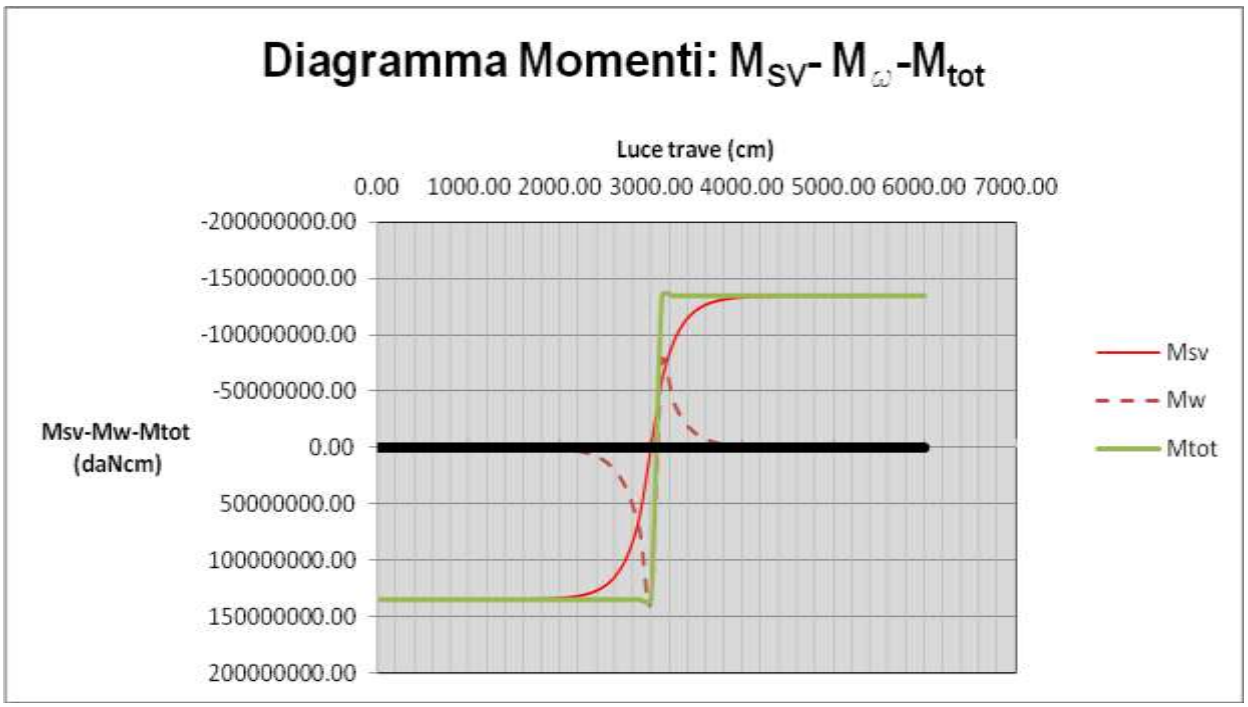
Costante torsionale J_{tors}	**19.84**	m^4
Costante di ingobbamento I_ω	**37.13**	m^6

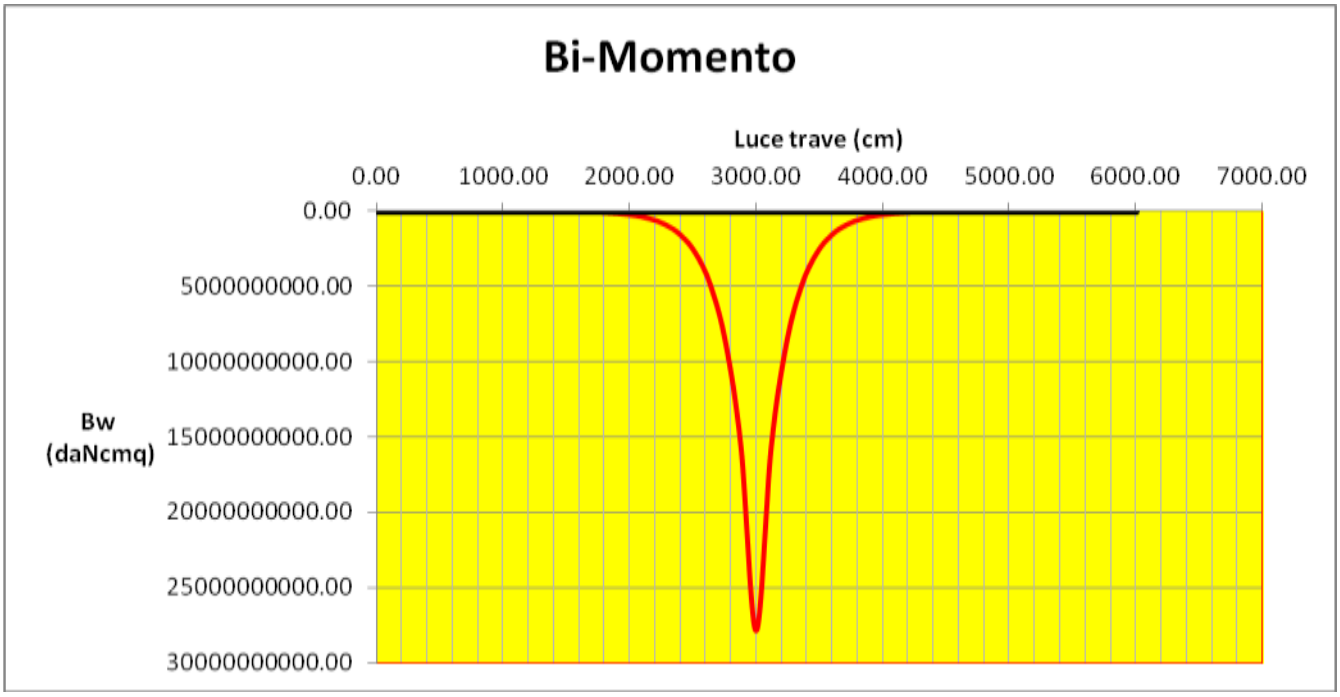
Schema statico: Trave appoggiata torsionalmente e caricata con una coppia torcente in mezzeria

Luce della trave L	**60**	m
codice profilo	**bridge**	

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt{\frac{G \cdot J_{tors}}{E \cdot I_\omega}}$$

Rapporto α**L=28.92**





Valori caratteristici:

	x=0	x=L/2	x=L	Val.max	Val.min.
B_ω	0.00	27904731176.82	0.00	27904731176.82	0.00
M_{SV}	134499858.78	0.00	-134499858.78	134499858.78	-134499858.78
M_ω	141.22	134500000.00	-141.22	134500000.00	-75427177.75
M_{tot}	134500000.00	134500000.00	-134500000.00	134500000.00	-134500000.00
M_{SV}/M_{tot}	100.00	0.00	100.00	100.00	0.00
M_ω/M_{tot}	0.00	100.00	0.00	100.00	0.00

Funzione di ingobbamento ω	4.702	m^2
Mom. statico ingobbamento S_ω	1.625	m^4
σ_ω Tensione normale	35.3	daN/cm^2
τ_ω Tensione tangenz.le	29.43	daN/cm^2

$$\tau_{tors} = \frac{M_{torc}}{2 \cdot \Omega \cdot t}$$

32.93 daN/cm^2

La tensione normale σ_ω come si vede non è irrilevante e anche la τ_ω è dello stesso ordine di grandezza della tensione tangenziale calcolata secondo la formula tradizionale.

4 IL SOFTWARE EXCEL ALLEGATO

In premessa al seguente capitolo, si vuole precisare che il seguente software non è un programma di Scienza delle Costruzioni, ne un programma professionale, ma un insieme di fogli di calcolo ad uso didattico.

I requisiti minimi per l'utilizzo del programma sono i seguenti:

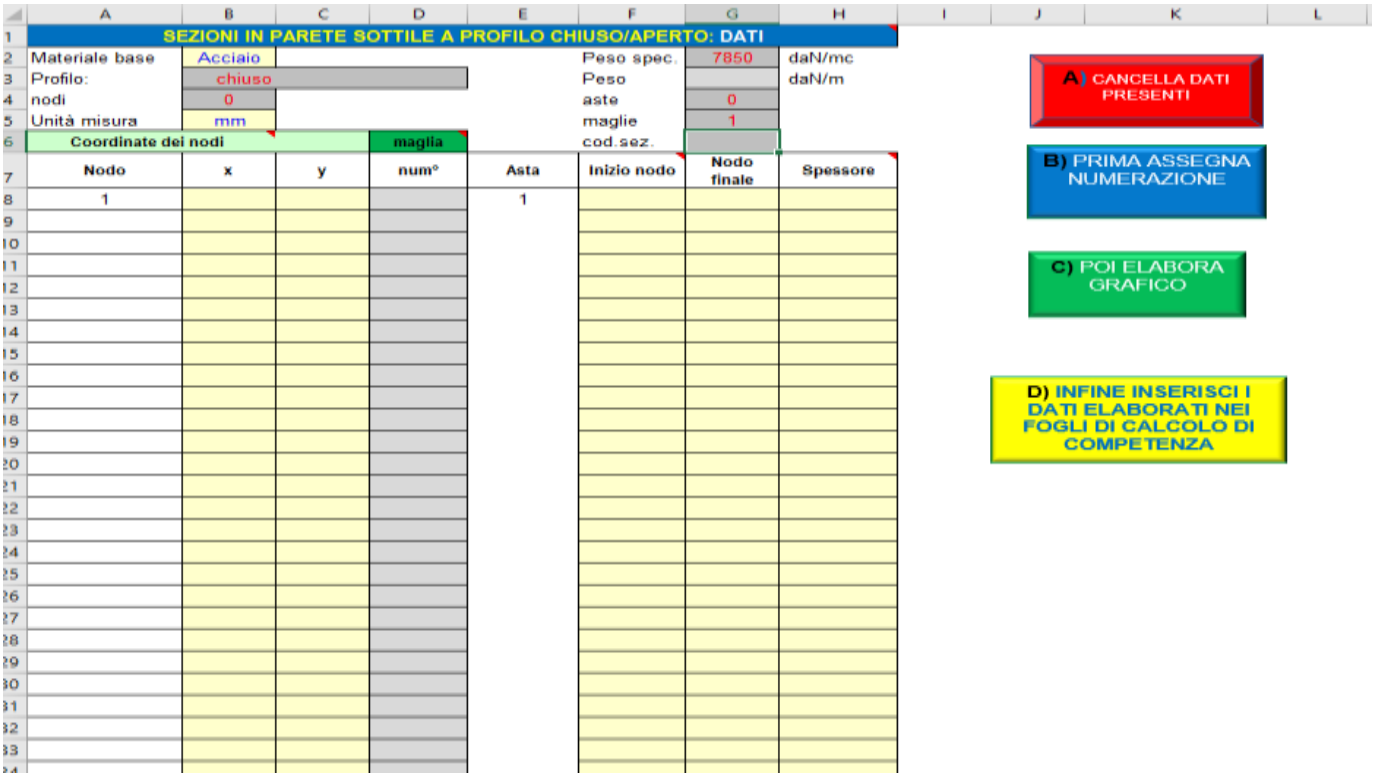
- Microsoft Windows 7,8, o superiore;
- Microsoft Office Excel 2007° superiore;
- Autocad 10 o superiore;
- Processore e memoria RAM con sistema operativo a 64 bit;
- Spazio libero di almeno 120 MB;
- Risoluzione video minima 1024x768.

Il formato internazionale del Pannello di Controllo di Windows deve essere impostato con il punto per il separatore decimale.

4.1 MENU' PRINCIPALE

L'input dei dati per la geometria delle sezioni è stato cambiato rispetto alla versione originaria.

Si accede ora dal file **Master Profili** che collega al file excel **Input Profili chiusi-aperti.xlsx,** che è valido come input sia per i profili chiusi che aperti. La novità riguarda nello specifico l'assegnazione automatica delle aste alle maglie di competenza. Nella sostanza basterà assegnare le coordinate dei nodi, i nodi iniziali e finali di ogni asta e il loro spessore nelle unità di misura (mm,cm o mt) e il materiale. Si leggano le istruzioni nel primo foglio. Quando si lancia la macro A di cancellazione dei dati presenti, all'interno è stata aggiunta la possibilità di inserire una sezione già presente nell'abaco sezioni dello stesso file.



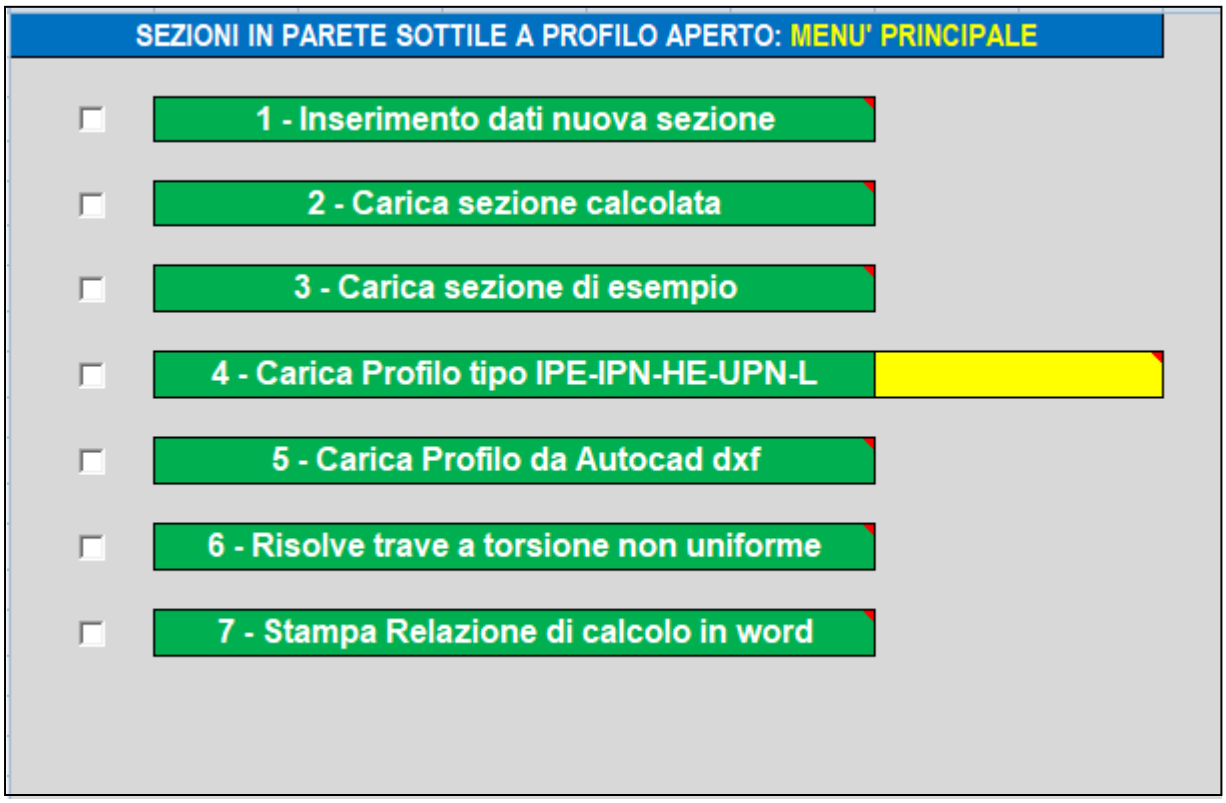
In sequenza si eseguiranno le macro A-B-C-D e poi si passerà al calcolo delle caratteristiche meccaniche e settoriali e alla verifica della sezione con l'inserimento delle sollecitazioni. È previsto un accesso immediato per aggiungere la torsione non uniforme in maniera diretta.

Ora si illustra la procedura precedente nel caso si voglia accedere al calcolo con il metodo precedente, più completo ma più ostico dal punto di vista dei dati da inserire.

I file di caricamento dei programmi sono costituiti da 2 fogli excel, uno dedicato ai profili aperti (Volume 1) ed uno a quelli chiusi (Volume 2):

- Profilo aperto.xls
- Profilo chiuso.xls

Il menu' di ognuno si presenta con la seguente maschera:



Spuntando la casella di ogni specifica barra verde si lancia il corrispondente sottomenu.
Si può accedere ai vari fogli di lavoro ovviamente anche dai menu a tendina orizzontale in fondo al foglio.

Al posto del punto 4 nei profili chiusi si caricano automaticamente dei profili a doppio tubolare disposti a L, tipo 2 x100x50x4 mm.

FOGLI DI LAVORO ACCESSIBILI DIRETTAMENTE
Sezione dati
Sezione risulati di verifica
Caratteristiche settoriali della sezione
Caratteristiche del materiale
Pressoflessione
Taglio
Torsione di Saint Venant
Tensioni dovute a torsione non uniforme
Verifica secondo Eurocodice 3
Grafici delle caratteristiche settoriali e tensioni

4.2.0 INSERIMENTO DATI NUOVA SEZIONE

4.2.1 INSERIMENTO DATI NUOVA SEZIONE PER UN PROFILO APERTO

Questo foglio di lavoro si presenta così nel caso di profilo aperto:

SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO: DATI

u.m.	cm
nodi	0
Etichette	si

Calcolo

nome file della sezione	
aste	0

Coordinate dei nodi

Nodo	x	y

Tipologia elementi

Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
1			

Andranno inseriti nelle caselle gialle e arancioni:

- L'unità di misura – mm-cm-m
- Il nome della sezione se si vogliono memorizzare i dati per un successivo utilizzo
- Le coordinate x e y della sezione
- Il numero di nodo di inizio e di nodo finale del tratto (asta) e lo spessore

Nel caso si voglia eseguire una verifica nel menu a destra devono essere inserite le sollecitazioni di calcolo:

- Lo sforzo normale in KN, i momenti flessionali Mx e My in KNm, i tagli orizzontali e verticali Hx e Vy in KN
- Nel caso si voglia eseguire una verifica anche a torsione non uniforme nella casella T.N.U mettere "si" e inserire la % del Momento primario MSV (momento alla Saint Venant) sul Momento totale (Mtot), il Bi-momento in KNm^2 rapportato al Momento torcente in KNm e la lunghezza della trave in cm. Si veda per la determinazione di questi valori il punto 6 del menù principale meglio spiegato nel seguito

SOLLECITAZIONI			
N (KN)		% Momento primario M_{SV}/Mtot	
Mx (KNm)		B_ω Bi-Momento KNm^2	
My (KNm)			
Hx (KN)		Lunghezza trave (cm)	
Vy (KN)			
Mt (KNm)			
T.N.U.			

Prendendo ad esempio la sezione 19 dell'"Archivio sezioni di esempio", tratta da "*Esercizi di Scienza delle Costruzioni*" Zavelani Rossi pag. 445, (vedi Archivo sezioni n. 19), si ottiene la seguente maschera:

SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO: DATI

u.m.	cm
nodi	8
Etichette	si

Calcolo

nome file della sezione	
aste	7

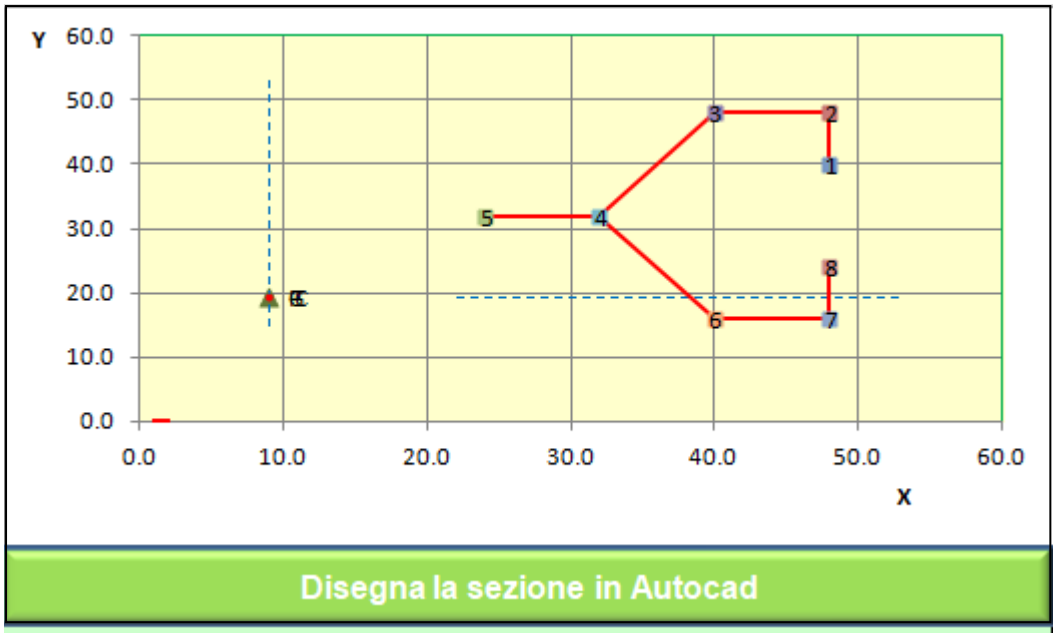
Coordinate dei nodi

Nodo	x	y
1	48.000	40.000
2	48.000	48.000
3	40.000	48.000
4	32.000	32.000
5	24.000	32.000
6	40.000	16.000
7	48.000	16.000
8	48.000	24.000

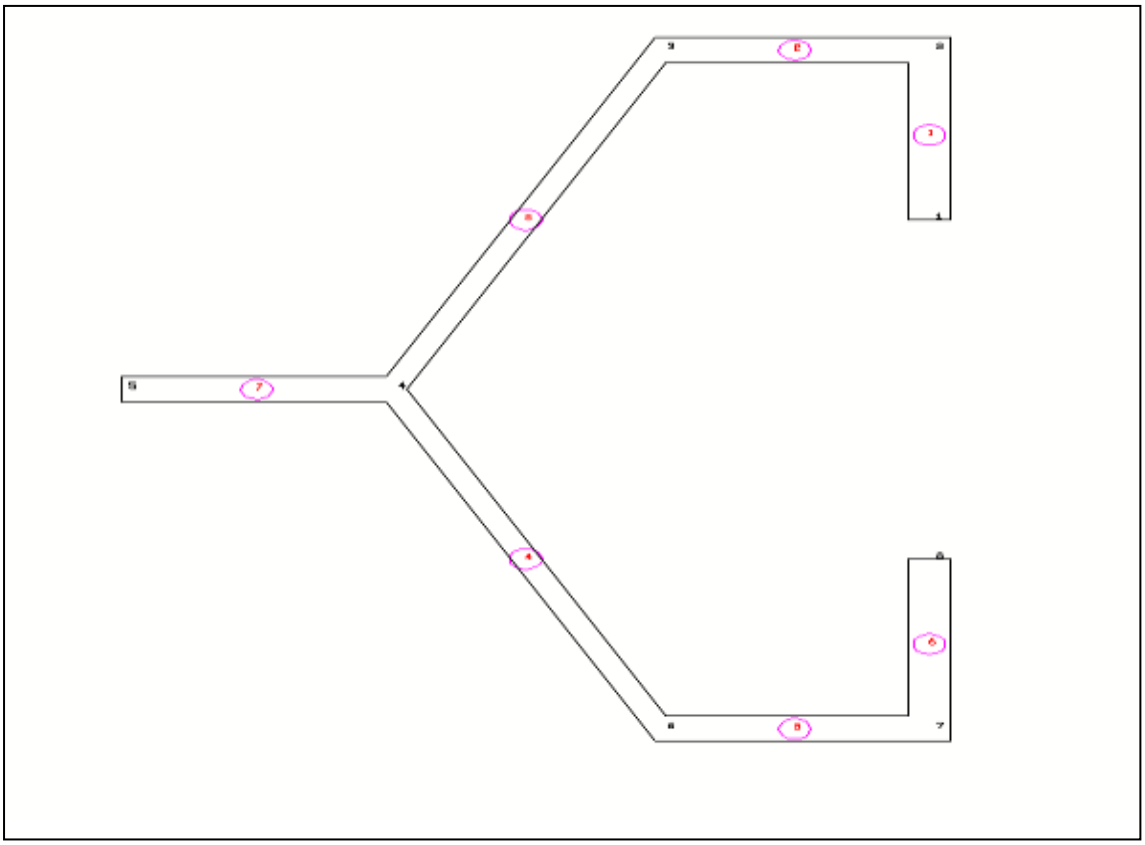
Tipologia elementi

Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
1	1	2	1.200
2	2	3	1.200
3	3	4	0.800
4	4	6	0.800
5	6	7	1.200
6	7	8	1.200
7	5	4	1.200

Il cui disegno elementare con il numero dei nodi è il seguente:



Previa chiusura di tutti i files aperti in Autocad, cliccando sulla barra verde si può tracciare il disegno in Autocad che dovrà essere rifinito per un utilizzo più dettagliato. Si esegua in Autocad il comando “Zoom Tutto” per visualizzare tutta la sezione.Si noti che nella situazione di pre calcolo il baricentro G, il centro di taglio C e il centro di ugual area P non sono identificati.



La sezione è disegnata in scala 1:1 con l’identificazione del numero di nodo della linea media e del numero del tratto così come inserito nei dati.

4.2.2 INSERIMENTO DATI NUOVA SEZIONE PER UN PROFILO CHIUSO

SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO CHIUSO: DATI E RISULTATI CARATTERISTICHE PRINCIPALI

Calcolo caratteristiche sezione

Unità misura	cm		nome file	virginia	tot. Interr.	3	
nodi	10	Orientaz. Aste	automatico	aste	12		cambio u.m.
Etichette	si	Calc.Val.Plast.	no	maglie	3		da m a cm

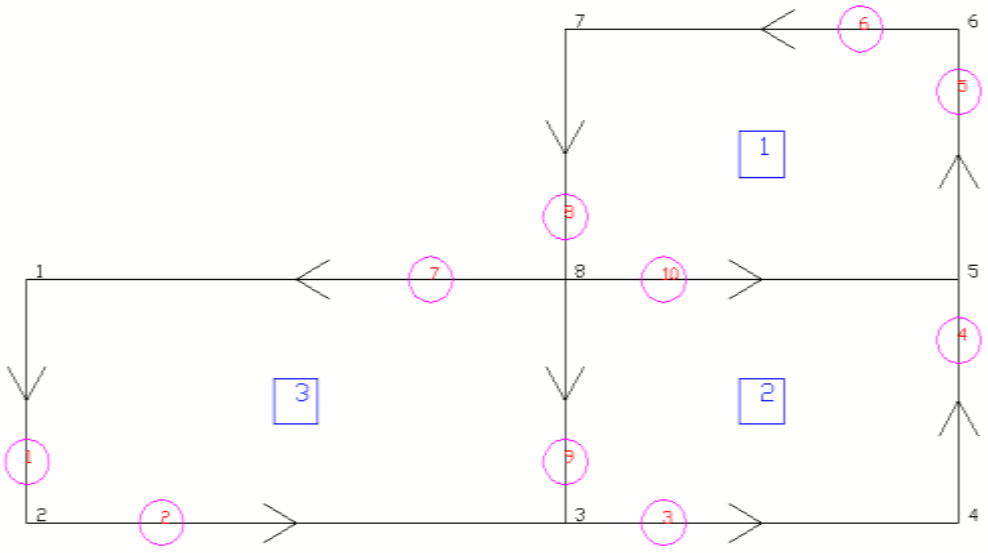
Coordinate dei nodi			maglia	Disegna schema Autocad della sezione				Interruzione
Nodo	x	y	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore	s/d
1	250.000	100.000	0	1	1	2	1.000	
2	150.000	100.000	3	2	2	3	1.000	
3	50.000	100.000	2	3	3	6	1.000	
4	50.000	0.000	1	4	6	9	1.000	
5	100.000	0.000	0	5	10	9	1.000	

In questo caso oltre a quanto indicato nella sezione precedente, per un profilo chiuso dovrà essere indicato anche il numero di maglia a cui appartiene il tratto con la seguente accortezza:

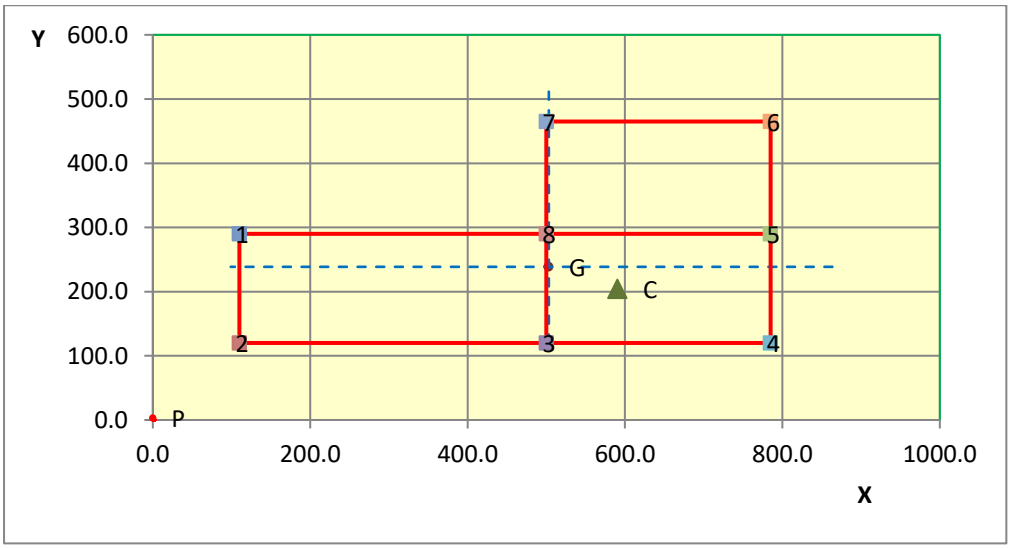
- Inserire 0 nel caso di tratti non appartenenti a nessuna maglia, come nel caso di appendici
- Nel caso di tratti appartenenti a più maglie (vedi asta 9), si dovranno inserire le maglie separate da una virgola (3,2 o 2,3).
- Indicare se l'orientazione dei tratti debba essere calcolata in automatico o lasciare in manuale il verso indicato dall'utente (vedi casella con scelta Automatico/manuale). Nella colonna interruzione viene indicato dove il software spezza l'asta con il simbolo s/d, s=a sinistra del nodo, d=a destra del nodo, uno per ogni maglia. Questa scelta è svolta dal software in automatico.
- Indicare se si vuole il calcolo dei valori plastici (Wplx, Wply) e del relativo punto P.

E' possibile prima del calcolo cambiare l'unità di misura dei valori già inseriti, per esempio da centimetri a millimetri e da centimetri a metri (vedi pulsante azzurro " cambio u.m.").

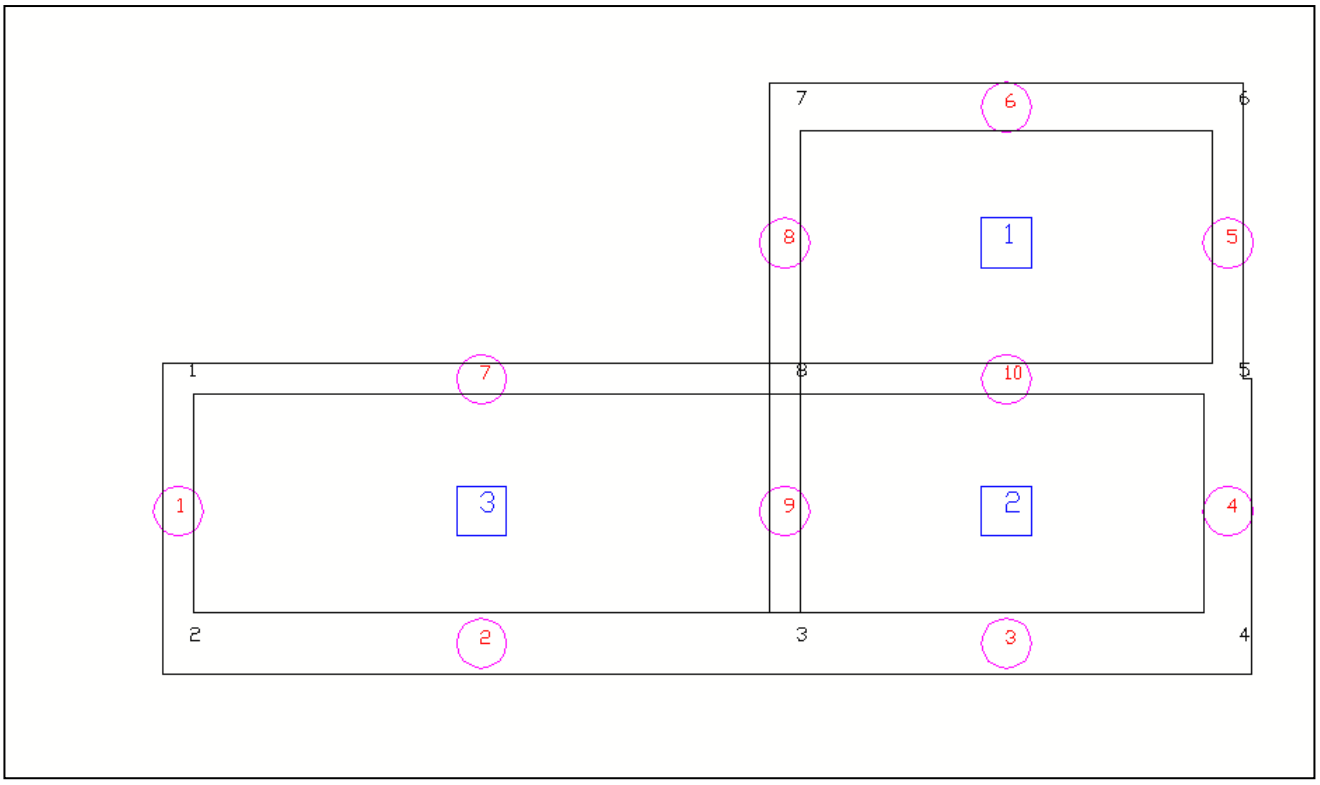
Il pulsante blu "Disegna schema Autocad della sezione" procede a disegnare uno schema con i versi inseriti, la numerazione dei nodi e dei tratti e il numero di maglia.



Schema della sezione



Disegno schematico immediato



Disegno della sezione con gli spessori

Nel caso della figura sopra riportata

Coordinate dei nodi			maglia	Tipologia elementi				Interruzione
Nodo	x	y	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore	s/d
1	110.000	290.000	3	1	1	2	20.000	
2	110.000	120.000	3	2	2	3	40.000	
3	500.000	120.000	2	3	3	4	40.000	d
4	785.000	120.000	2	4	4	5	30.000	
5	785.000	290.000	1	5	5	6	20.000	d
6	785.000	465.000	1	6	6	7	30.000	
7	500.000	465.000	3	7	8	1	20.000	
8	500.000	290.000	1	8	7	8	20.000	
			2,3	9	8	3	20.000	d
			1,2	10	8	5	20.000	

Il pulsante verde “Calcolo caratteristiche della sezione “procede al calcolo dei seguenti valori

Origine nel baricentro					
A =	67950.00	cm²	1	345.000	1
P =	2495.00	cm	1	675.000	1
x_G =	503.20	cm	1	4652775.02	1
y_G =	238.60	cm	S_x^{bot}=	8882058.75	cm³
I_x =	1053396481.79	cm⁴	S_y^{right}=	10988738.52	cm³
I_y =	3096677456.54	cm⁴	S_y^{left}=	7875671.33	cm³
I_{xy} =	541794983.44	cm⁴			
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	13.97	gradi	ρ_x =	116.27	cm
I_{xp} =	918623941.94	cm⁴	ρ_y =	218.07	cm³
I_{yp} =	3231449996.39	cm⁴	W_{plx}=		cm³
I_p =	3608278954.88	cm⁴	W_{ply}=		cm³
Centro taglio riferito a G			**Centro taglio riferito assi iniziali**		
X_C =	87.32	cm	X_C =	590.51	cm
Y_C =	-34.36	cm	Y_C =	204.24	cm
J_t =	1.4560E+09	cm⁴	X_P =		cm
I_ω =	8.8890E+12	cm⁶	Y_P =		cm⁴

CARATTERISTICHE SETTORIALI DELLA SEZIONE (WARPING PROPERTIES)

Coordinata x del centro di taglio rispetto all'origine x_{cO} 590.51 cm — rispetto al baricentro x_{cG} 87.32 cm

Coordinata y del centro di taglio rispetto all'origine y_{cO} 204.24 cm — rispetto al baricentro y_{cG} -34.36 cm

Costante di ingobbamento (Warping constant) I_ω 8.89E+12 cm6

Menù

Funzione di ingobbamento ω_C rispetto a C (warping coordinates)

Nodo	ω_C cm²
1	-38367.792
2	10576.888
3	5873.834
4	-8303.639
5	-5610.714
6	-8934.327
7	24820.427
8	3300.448

Asta	Inizio nodo ω_{ci}	Mezzeria ω_{ck}	Nodo finale ω_{cj}
1	-38367.792	-13895.452	10576.888
2	10576.888	8225.361	5873.834
3	5873.834	-1214.902	-8303.639
4	-8303.639	-6957.176	-5610.714
5	-5610.714	-7272.520	-8934.327
6	-8934.327	7943.050	24820.427
7	3300.448	-17533.672	-38367.792
8	24820.427	14060.438	3300.448
9	3300.448	4587.141	5873.834
10	3300.448	-1155.133	-5610.714

Momento statico di ingobbamento $S\omega_C$

Asta	Inizio nodo $S\omega_{ci}$	Mezzeria $S\omega_{ck}$	Nodo finale $S\omega_{cj}$
1	-7.3240E+07	-1.1766E+08	-1.2049E+08
2	-1.2049E+08	-4.7156E+07	7.8306E+06
3	2.1045E+07	3.4323E+07	7.1955E+06
4	7.1955E+06	-1.2262E+07	-2.8286E+07
5	-2.2774E+07	-3.4047E+07	-4.8228E+07
6	-4.8228E+07	-5.0347E+07	1.9685E+07
7	6.3522E+07	3.5767E+07	-7.3240E+07
8	2.4025E+07	5.8046E+07	7.3237E+07
9	1.1027E+08	1.1698E+08	1.2587E+08
10	-1.2883E+07	-9.8257E+06	-1.9467E+07

Notazioni e formule	
Input coordinate all'inizio del segmento k	$x_i,\ y_i$
Input coordinate alla fine del segmento k	$x_j,\ y_j$
Area del k-esimo elemento	$A_k = l_k t_k$
Area totale della sezione	$A = \Sigma A_k$
Momento statico della sezione	$q_x = (1/2)\Sigma(y_i+y_j)A_k$
rispetto agli assi di riferimento	$q_y = (1/2)\Sigma(z_i+z_j)A_k$
Coordinate del baricentro rispetto agli assi di riferimento	$x_G = q_y/A$
	$y_G = q_x/A$
Momento di inerzia rispetto agli assi di riferimento	$I_x = (1/3)\Sigma(y_{ci}^2+y_{ci}y_{cj}+y_{cj}^2)A_k$
con origine nel baricentro	$I_y = (1/3)\Sigma(x_{ci}^2+x_{ci}x_{cj}+x_{cj}^2)A_k$
Coordinate normalizzate rispetto al baricentro	$y_{ci} = y_i - y_G$
	$x_{ci} = x_i - x_G$
Momento di inerzia centrifugo	$I_{xy} = (1/3)\Sigma(x_{ci}y_{ci}+x_{cj}y_{cj})A_k + (1/6)\Sigma(x_{ci}y_{cj}+x_{cj}y_{ci})A_k$
Inclinazione degli assi principali di inerzia	$\varphi_p = (1/2)\tan^{-1}(2I_{xy}/(I_y-I_x))$
Momenti principali di inerzia	$I_{xp} = I_x\cos^2\varphi_p+I_y\sin^2\varphi_p - I_{xy}\sin(2\varphi_p)$
	$I_{yp} = I_x + I_y - I_{xp}$
Costante torsionale (formula sezioni aperte)	$J = (1/3)\Sigma l_k t_k^3$
Coordinate del centro di taglio rispetto al baricentro	$x_C = x_G+ (I_{xy}I_{\omega x}-I_yI_{\omega y})/(I_{xy}^2-I_xI_y)$
	$y_C = y_G - (I_{xy}I_{\omega y}-I_xI_{\omega x})/(I_{xy}^2-I_xI_y)$
Momento di inerzia settoriale	$I_{\omega x} = (1/3)\Sigma(\omega_i x_{ci}+\omega_j x_{cj})A_k + (1/6)\Sigma(\omega_i x_{cj}+\omega_j x_{ci})A_k$
	$I_{\omega y} = (1/3)\Sigma(\omega_i y_{ci}+\omega_j y_{cj})A_k + (1/6)\Sigma(\omega_i y_{cj}+\omega_j y_{ci})A_k$
Funzione di ingobbamento nel centro dell'asta	$\omega_K = \Sigma x_{ci}(y_{cj}-y_{ci}) - y_{ci}(x_{cj}-x_{ci})$
Momento settoriale principale	$S_\omega = \Sigma(\omega_i-\omega_j)A_k$
Costante di ingobbamento	$I_\omega = (1/3)\Sigma(\omega_{ni}^2+\omega_{ni}\omega_{nj}+\omega_{nj}^2)A_K$
Funzione di ingobbamento normalizzata	$\omega_{np} = (1/2A)\Sigma(\omega_{oi}+\omega_{oj})A_k - \omega_{op}$
Funzione di ingobbamento normalizzata rispetto al centro di taglio	$\omega_{op} = \Sigma\ x_{si}(y_{sj}-y_{si}) - y_{si}(x_{sj}-x_{si})$
Coordinate normalizzate rispetto al centro di taglio	$x_{si} = x_i - x_s$
	$y_{si} = y_i - y_s$

4.2.3 CARICAMENTO DI UNA SEZIONE GIA' CALCOLATA

Spuntando questo sottomenù, si carica dalla cartella “Archivio” scegliendo il corrispondente file testo.

4.3 CARICAMENTO DI UNA SEZIONE DI ESEMPIO (DA MANUALI O DAL WEB)

Spuntando questo sottomenù, si deve indicare il numero della sezione di esempio nella casella giallo chiaro.

Si veda l’allegato “Abaco delle sezioni“ per l’identificazione della sezione di esempio. Si può caricare la sezione con i file classici <Profilo chiuso.xlsm> o <Profilo aperto.xlsm> con il riquadro rosso. Per le sole sezioni a profilo chiuso, si possono caricare i dati attraverso un’interfaccia semplificata pigiando il riquadro azzurro, che darà accesso al file inputPC.xlsm. Si leggano le istruzioni direttamente sul file.

ARCHIVIO SEZIONI DI ESEMPIO TRATTE DA MANUALI O DAL WEB

c

Scegli codice sezione 5 c

inserisce dati sezione in Profilo chiuso o aperto

(*) = c= sezione chiusa - a= sezione aperta

N° sez. ins. 51

inserisce dati sezione in inputPC.xlsm per l'interfaccia semplificata, solo per profili chiusi

DESCRIZIONE	codice	tipo (*)
Attard 3 maglie regolari pag 159 di "Introduction to the theory of thin-walled structures" N.W.Murray - Oxford Engineering Science series	1	c
Sezione a 2 maglie con appendici tratta dall'articolo di W.Wagner-F.Gruttmann "A displaced method for the analysis of flexural shear ..." pag 15	2	c
Sezione Virginia University a 2 maglie con appendici tratta da W.D. Pilkey-L.Kitis " Notes on the linear analysis of thin-walled beams" pag 70 Fig. 3.9	3	c
Sezione chiusa a 3 maglie tratta dal al Franciosi “Problemi di scienze delle costruzioni Vol II cap X pag. 345 Figura 10-36a.	4	c
Sezione Virginia University a 3 maglie con appendici tratta da W.D. Pilkey-L.Kitis " Notes on the linear analysis of thin-walled beams" pag 67 Fig. 3.7	5	c
Struttura catino a 1 maglia	6	c
Pluricellulare a 2 maglie a catino	7	c
Sezione a 2 maglie trapezoidali tratta dall'articolo "Aircraft-structures-complete-notes" pag 211	8	c
Sezione scafo a 8 maglie tratto da Makmun-Siswanto-Firmandha "Numerical evaluation of normal stress distribution on ship cross section" Part1/Part2	9	c
Pluricellulare 5 maglie Episcopo	10	c
Sezione a 2 maglie triangolari tratta dall'articolo di W.Wagner-F.Gruttmann "A displaced method for the analysis of flexural shear ..." pag 12	11	c
Tubolare doppio classico per montante incastellatura interna di ascensore	12	c
Sezione chiusa con appendici ad 1 maglia tratta da esercizi di Scienze delle Costruzioni Zavelani Rossi pag. 458	13	c
Sezione chiusa con appendici ad 1 maglia tratta da esercizi di Scienze delle Costruzioni Zavelani Rossi pag. 464	14	c
Pluricellulare a 7 maglie tratto dall'articolo di Franco Maceri "On the torsion of thin-walled multicell sections" pag 232	15	c
Montante per incastellatura esterna di ascensore a 5 maglie a forma di L con appendici	16	c
Profilo aperto tipo T con appendici	17	a
Sezione 4 maglie con appendici	18	c
Sezione aperta esercizi di Scienze delle Costruzioni Zavelani Rossi pag. 445	19	a
Sezione tratta dall'articolo di Hangang Li " Thin-walled for beam finite elements for static analysis of curved hsunched and skrew multicell..."pag 137	20	c
Tubolare doppio	21	c
Montante per struttura di sostegno caldaia esterna edificio industriale Parma	22	c
Profilo aperto sezione tratta articolo "Computer program for determination of geometrical properties .." di Aleksandar Prokic	23	a
Sezione a 2 maglie Ocean Engineering	24	c
Profilo ad 1 maglia con appendici	25	c
Profilo 1 maglia trapezoidale	26	c
Profilo aperto a ponte rovesciato	27	a

4.4 CARICAMENTO DI UN PROFILO TIPO IPE-IPN-HE-UPN-L (sezione aperta)

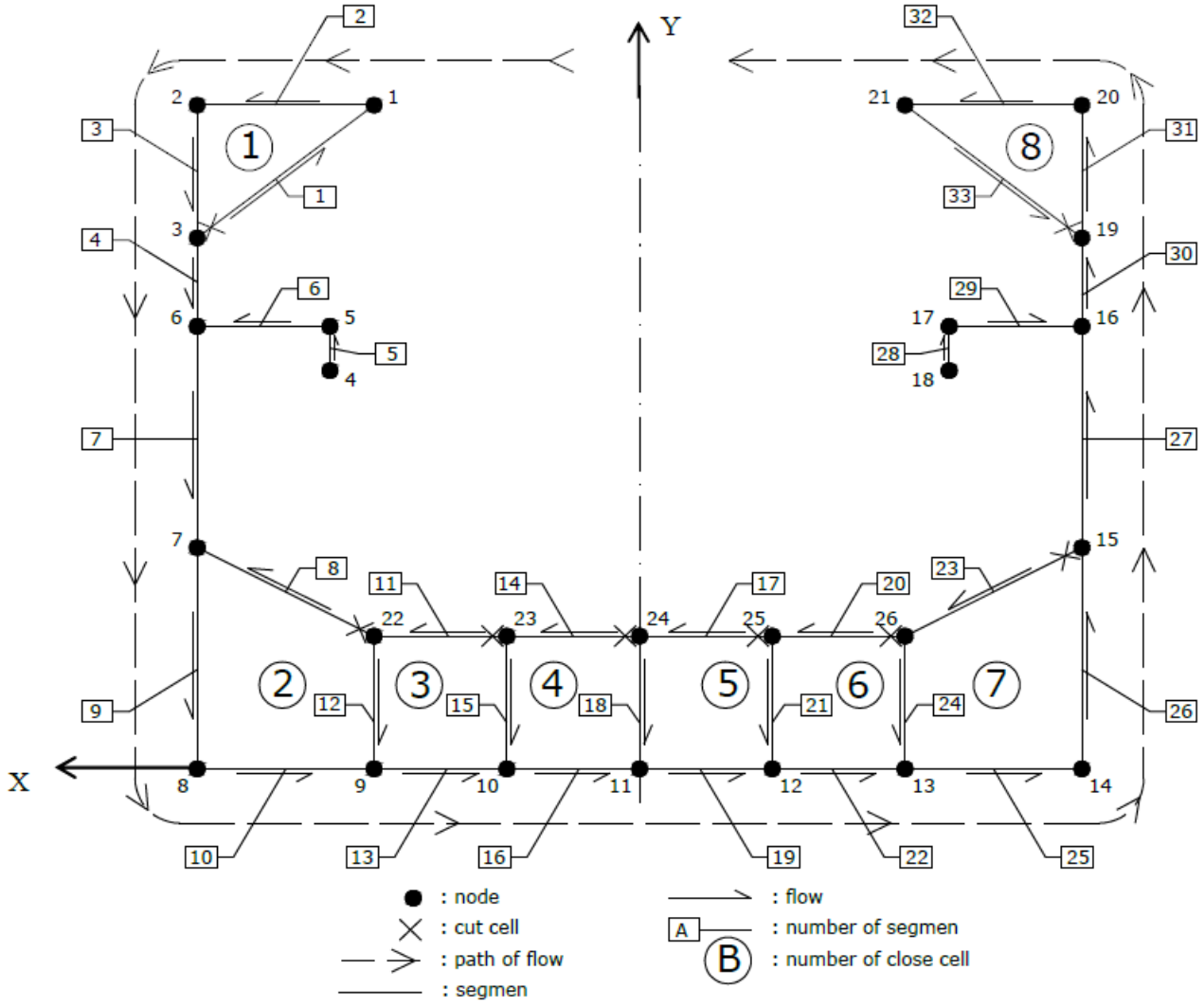
Scegliendo preventivamente dall' elenco contenuto nella casella gialla, per esempio IPE200, si carica un profilo tipo IPE200, cioè senza raccordi, quale può essere un profilo sagomato a freddo.

È possibile, se necessario, caricare il vero profilo per il calcolo secondo Eurocodice 3.

Per un profilo chiuso si può automaticamente caricare un profilo doppio tubolare a L (tipo 2tubolari 100x50x3 mm)

4.5 CARICAMENTO PROFILO DA AUTOCAD

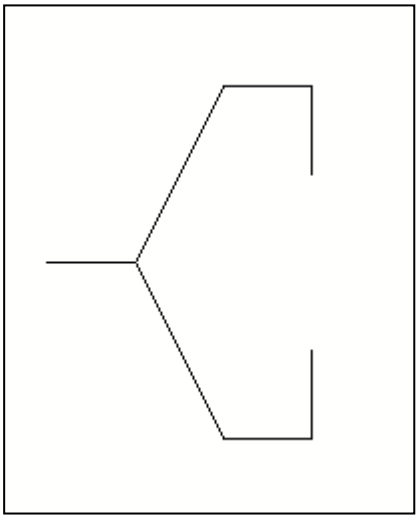
Nel caso di sezioni complesse quale può essere la sezione pluricellulare di uno scafo metallico a 8 maglie e appendici, 26 nodi e 33 aste della figura sotto riportata, può essere vantaggioso l'inserimento dell'input attraverso Autocad.



Spuntando sulla casella a sinistra della barra verde del menù principale indicata con il numero 5, si avvia la procedura di inserimento di una sezione già disegnata in Autocad e salvata come file dxf.

Questo comando apre il file excel "da dxf a xls". È necessario, come detto, aver già creato un file Autocad salvato con un nome a piacere in dxf, disegnando il profilo con il comando "linea" di Autocad una dopo l'altra. Se il profilo ha maglie chiuse deve essere creato anche un layer "maglie" e le maglie del disegno devono essere contornate da polilinee.

Per esempio si disegna la semplice sezione a profilo aperto qui di seguito indicata salvata in dxf



Dal file excel “da dxf a xls” si lancia il comando “IMPORTAZIONI DATI DA DISEGNO AUTOCAD” (vedi barra blu in alto a sinistra) cercando il file che in questo caso si chiama “Sezione di esempio.dxf” salvata nella cartella “Archivio”

Il file excel “da dxf a xls” avrà il seguente aspetto:

IMPORTAZIONE DATI DA DISEGNO AUTOCAD

8	Commento	u.m.	mm
nodo	x	y	z
1	48.000	40.000	0.000
2	40.000	16.000	0.000
3	48.000	48.000	0.000
4	40.000	48.000	0.000
5	24.000	32.000	0.000
6	32.000	32.000	0.000
7	48.000	16.000	0.000
8	48.000	24.000	0.000

7							
elem.	xa	ya	za	xb	yb	zb	layer
1	48.000	40.000	0.000	48.000	48.000	0.000	0
2	48.000	48.000	0.000	40.000	48.000	0.000	0
3	32.000	32.000	0.000	40.000	48.000	0.000	0
4	32.000	32.000	0.000	24.000	32.000	0.000	0
5	40.000	16.000	0.000	32.000	32.000	0.000	0
6	40.000	16.000	0.000	40.000	16.000	0.000	0
7	48.000	16.000	0.000	40.000	24.000	0.000	0

Inserisci dati in profilo

Nome file	Sezione 445		0
elem.	inizio nodo	Nodo finale	maglia
1	1	3	
2	3	4	
3	6	4	
4	6	5	
5	2	6	
6	2	7	
7	7	8	

Sarà necessario assegnare le unità di misura. In questo caso essendo il profilo aperto non ci sono maglie.

A questo punto cliccando sulla barra verde “Inserisci dati in profilo” i dati saranno inseriti in maniera automatico nel file “Profilo aperto.xls”. Ricordarsi di inserire gli spessori nei tratti. È importante che il file Profilo aperto o il file Profilo chiuso non contengano dati, devono essere vuoti.

SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO: DATI

	mm
nodi	8
Etichette	si

Calcolo

nome file della sezione: dwgProva1

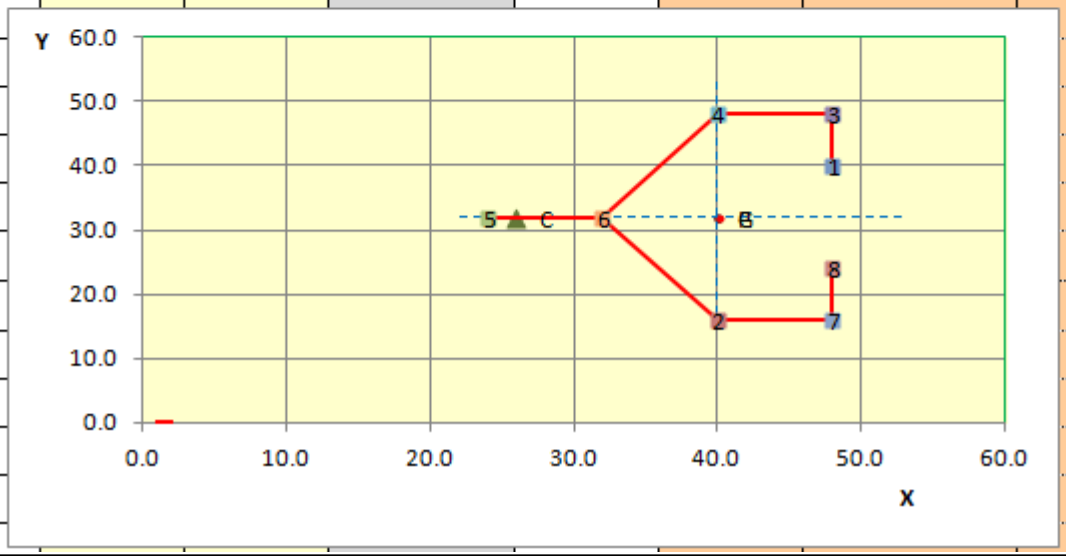
aste: 7

Coordinate dei nodi

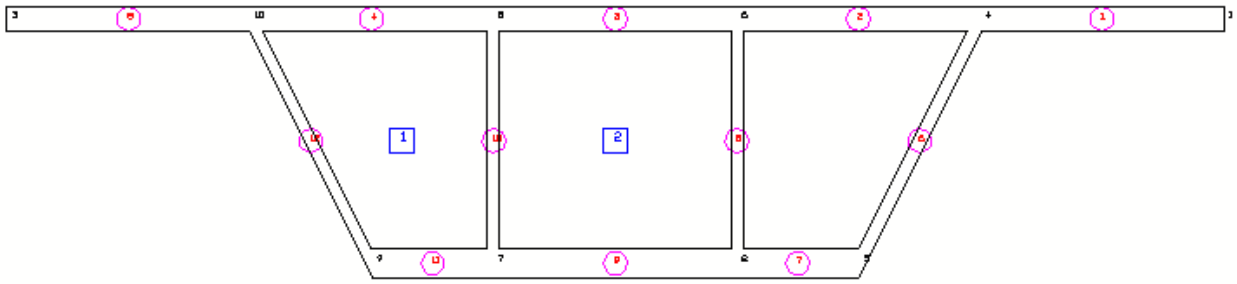
Nodo	x	y
1	48.000	40.000
2	40.000	16.000
3	48.000	48.000
4	40.000	48.000
5	24.000	32.000
6	32.000	32.000
7	48.000	16.000
8	48.000	24.000

Tipologia elementi

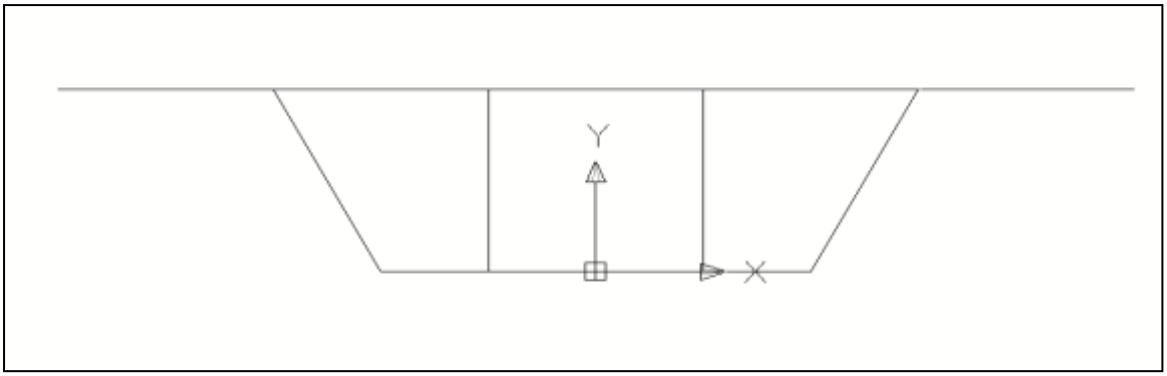
Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
1	1	3	1.200
2	3	4	1.200
3	4	6	0.800
4	5	6	1.200
5	2	6	0.800
6	7	2	1.200
7	8	7	1.200



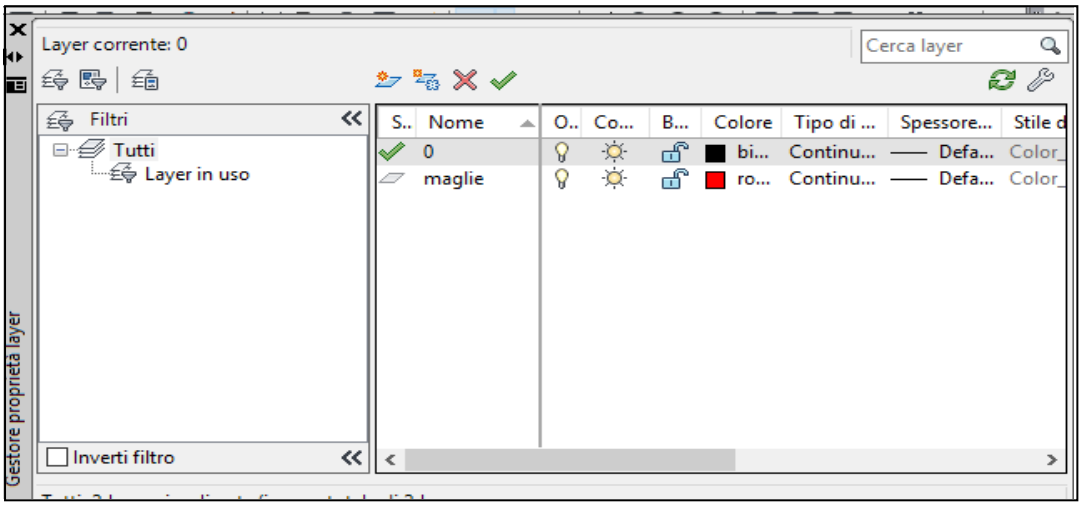
Per una sezione a maglie chiusa con 2 appendici, come quella della figura sotto indicata



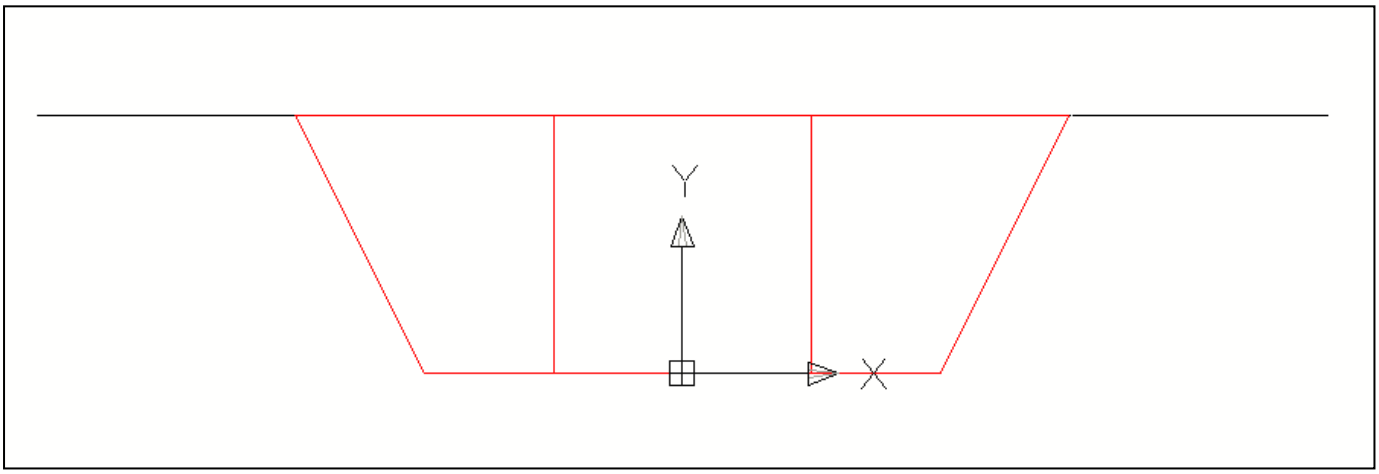
Si disegna la sezione in Autocad:



Dopo aver creato il layer “maglie”:



si contornano le maglie con questo layer:



Si importano i dati con il foglio excel “da dxf a xls”:

IMPORTAZIONE DATI DA DISEGNO AUTOCAD

10	Commento	u.m.	mm
Nodo	x	y	z
1	250.000	100.000	0.000
2	50.000	0.000	0.000
3	-250.000	100.000	0.000
4	150.000	100.000	0.000
5	100.000	0.000	0.000
6	50.000	100.000	0.000
7	-50.000	0.000	0.000
8	-50.000	100.000	0.000
9	-100.000	0.000	0.000
10	-150.000	100.000	0.000

12							
elem.	xa	ya	za	xb	yb	zb	layer
1	250.000	100.000	0.000	150.000	100.000	0.000	0
2	150.000	100.000	0.000	50.000	100.000	0.000	0
3	50.000	100.000	0.000	-50.000	100.000	0.000	0
4	-50.000	100.000	0.000	-150.000	100.000	0.000	0
5	-150.000	100.000	0.000	-250.000	100.000	0.000	0
6	100.000	0.000	0.000	150.000	100.000	0.000	0
7	50.000	0.000	0.000	100.000	0.000	0.000	0
8	50.000	0.000	0.000	50.000	100.000	0.000	0
9	50.000	0.000	0.000	-50.000	0.000	0.000	0
10	-50.000	0.000	0.000	-50.000	100.000	0.000	0
11	-50.000	0.000	0.000	-100.000	0.000	0.000	0
12	-100.000	0.000	0.000	-150.000	100.000	0.000	0

Inserisci dati in profilo

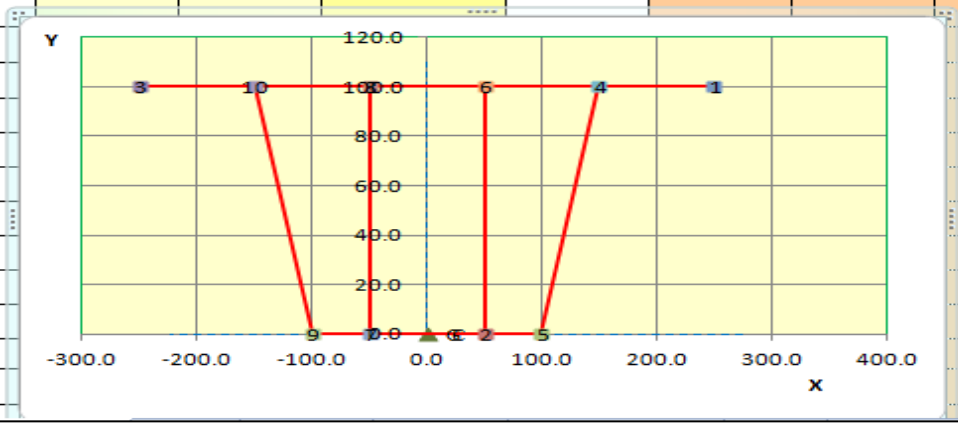
Nome file			3
elem.	Inizio nodo	Nodo finale	maglia
1	1	4	0
2	4	6	3
3	6	8	2
4	8	10	1
5	10	3	0
6	5	4	3
7	2	5	3
8	2	6	2,3
9	2	7	2
10	7	8	1,2
11	7	9	1
12	9	10	1

e infine si inseriscono nel file di calcolo cliccando sulla barra verde:

SEZIONI CON ELEMENTI APERTI E MAGLIE CHIUSE PLURICONNESSE

Unità misura	mm			Sezione 445 tot. Interr.	3
nodi	10	aste	12		
Etichette	si	maglie	3		

Coordinate dei nodi			maglia	Tipologia elementi				Interruzione
Nodo	x	y	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore	s/d
1	250.000	100.000	0	1	1	4	10.000	
2	50.000	0.000	3	2	4	6	10.000	
3	-250.000	100.000	2	3	6	8	10.000	d
4	150.000	100.000	1	4	8	10	10.000	
5	100.000	0.000	0	5	10	3	10.000	d
6	50.000	100.000	3	6	5	4	5.000	
7	-50.000	0.000	3	7	2	5	12.000	
8	-50.000	100.000	2,3	8	2	6	5.000	
9	-100.000	0.000	2	9	2	7	12.000	d
10	-150.000	100.000	1,2	10	7	8	5.000	
			1	11	7	9	12.000	
			1	12	9	10	5.000	



4.6 RISOLUZIONE DI UNA TRAVE A TORSIONE NON UNIFORME

Spuntando questo sottomenù, alla voce della barra verde numero 6 si carica il programma Excel per il calcolo della "Sollecitazione per Torsione non uniforme".

Nel foglio è necessario inserire il Materiale, la luce della trave in cm e il tipo di sezione che può essere:

- Profilo indicando anche il codice (Es IPE 450 dall'elenco)
- Da file specificando il file in cui è memorizzato la sezione in formato testo precedentemente calcolata
- Libera indicando nelle apposite 2 caselle a sinistrala la costante torsionale J_{tors} e la costante di ingobbamento I_ω

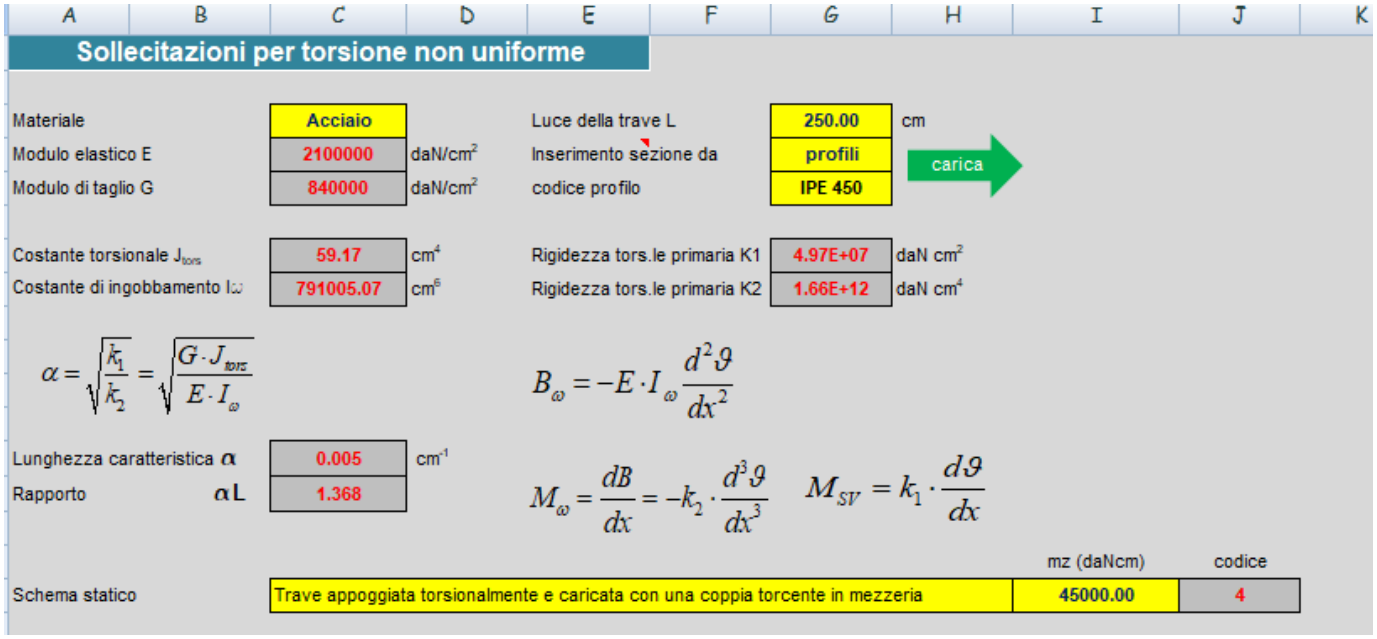
Nei primi 2 casi vengono caricate automaticamente i valori di J_{tors} e I_ω

Nello schema statico bisogna scegliere tra i possibili 4 casi di:

- Trave appoggiata torsionalmente e caricata con una coppia torcente in mezzeria
- Mensola incastrata torsionalmente e caricata con un carico torcente uniforme
- Trave appoggiata torsionalmente e sollecitata da un carico torcente uniforme
- Trave appoggiata torsionalmente e caricata con una coppia torcente in mezzeria

Indicare i valori di sollecitazione e cioè a seconda dei casi la coppia torcente C in daNcm o il carico torcente mz in daNcm/cm.

Procedere poi con il pulsante "Calcola"



Vengono tabellati i valori di calcolo in 50 sezioni della trave e diagrammati i corrispondenti valori di:

B_ω	Bi-momento ($F \cdot L^2$)
M_{SV}	Momento principale di Saint Venant dovuto a torsione pura
M_ω	Momento secondario o da torsione non uniforme
M_{tot}	Momento totale somma di M_{SV} e di M_ω
M_{SV}/M_{tot}	Rapporto tra il momento principale e quello totale
M_ω/M_{tot}	Rapporto tra il momento secondario e quello totale

Nel corrispondente Foglio di lavoro “RT” viene stampata una breve relazione.

Si procede poi con l’inserimento dei valori caratteristici nel foglio “Profilo aperto” o “Profilo chiuso”

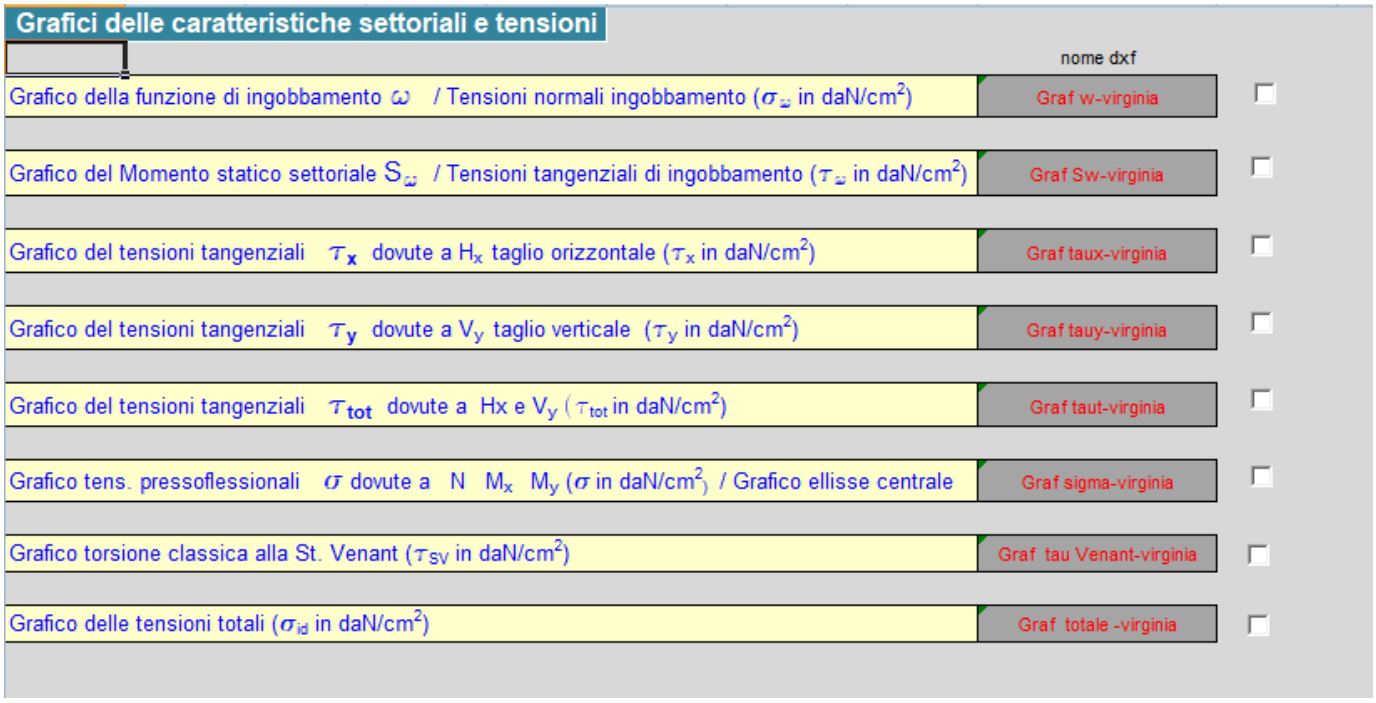
Con il file di interfaccia inputPC.xlsm il calcolo delle caratteristiche della TNU avviene in automatico.

4.7 STAMPA RELAZIONE DI CALCOLO IN WORD

Il contenuto dei risultati di calcolo può essere trasferito in un file word

4.8 GRAFICI DELLE SOLLECITAZIONI E DELLE CARATTERISTICHE SETTORIALI

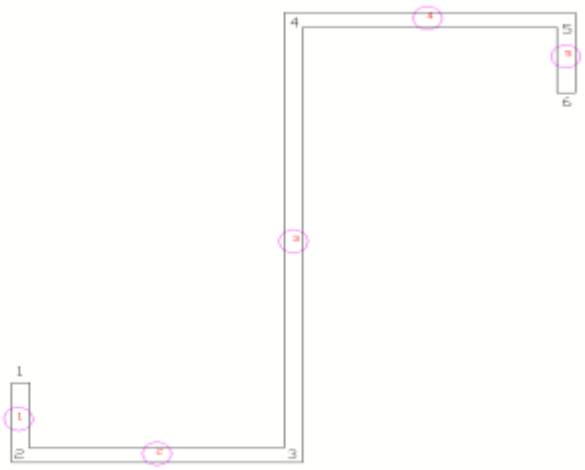
È possibile diagrammare le seguenti funzioni e tensioni:



4.9 VALIDAZIONE DEI RISULTATI

4.9.1 VALIDAZIONE PER UNA SEZIONE PRESSOINFLESSA SOGGETTA ANCHE A MOMENTO TORCENTE

Si esamina la sezione aperta di cui al testo "*Esercizi di Scienza delle Costruzioni* "- Zavelani e Rossi pag. 456", Dopo avere caricato la sezione dal menù principale parte 3:



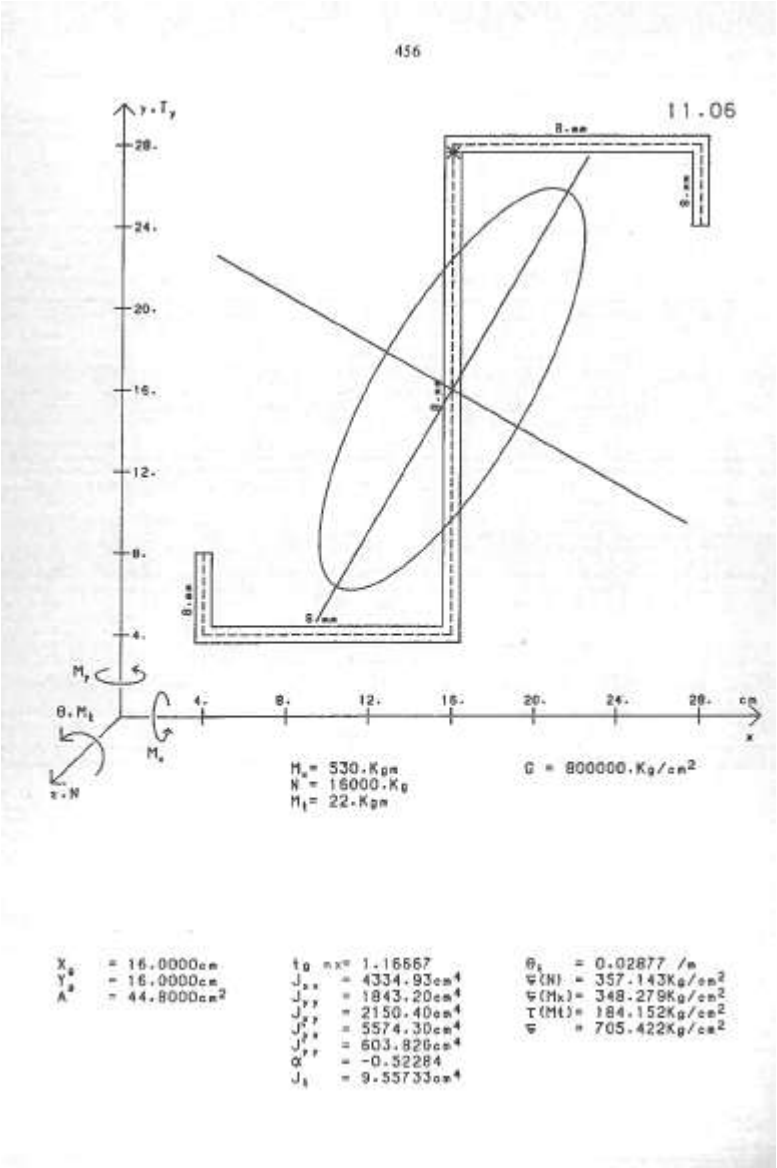
e le sollecitazioni

SOLLECITAZIONI			
N (KN)	160.000	% Momento primario M_{SV}/Mtot	
Mx (KNm)	-5.300	B_{ω} Bi-Momento KNm^2	
My (KNm)			
Hx (KN)		Lunghezza trave (cm)	
Vy (KN)			
Mt (KNm)	0.220		
T.N.U.	no		

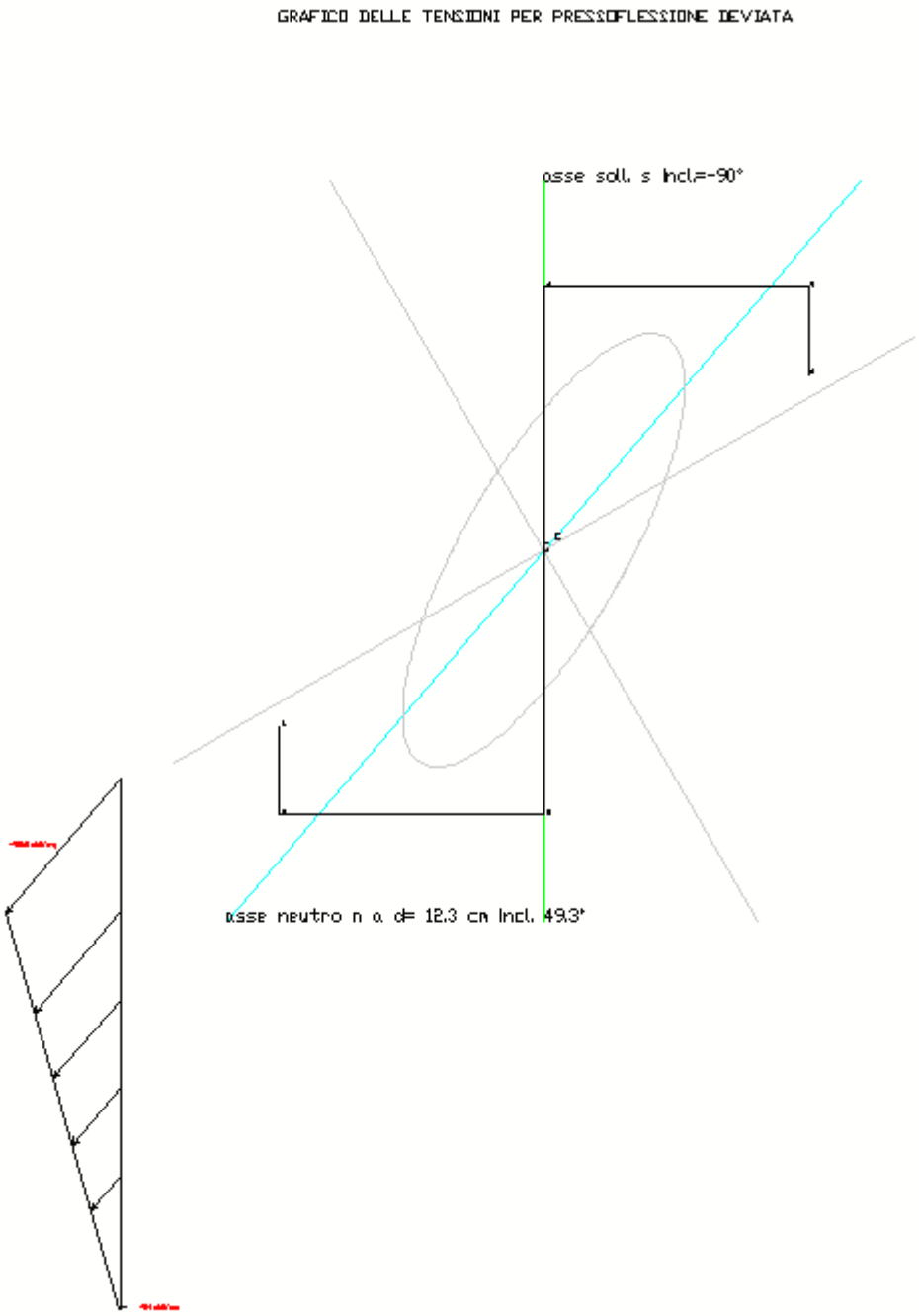
I risultati ottenuti sono gli stessi indicati nel volume di cui sopra:

asta	nodo i	nodo j	Pressoflessione		Taglio		Torsione princ.		Torsione non uniforme		
			σ_N (daN/cm²)	σ_{tot} (daN/cm²)	τ_x (daN/cm²)	τ_y (daN/cm²)	τ_{Mt} (daN/cm²)	$\tau_{ecc.\ C.T.}$ (daN/cm²)	σ_ω (daN/cm²)	τ_ω (daN/cm²)	σ_{id} (daN/cm²)
1	2	1	357.14	299.49	0.00	0.00	184.15	0.00	0.00	0.00	437.53
2	3	2	357.14	704.87	0.00	0.00	184.15	0.00	0.00	0.00	773.68
3	4	3	357.14	704.87	0.00	0.00	184.15	0.00	0.00	0.00	773.68
4	5	4	357.14	414.80	0.00	0.00	184.15	0.00	0.00	0.00	523.25

5	6	5	357.14	530.71	0.00	0.00	184.15	0.00	0.00	0.00	619.18



Il grafico delle tensioni ($\varphi = 29.96°$ inclinazione assi principali)



4.9.2 VALIDAZIONE PER UNA SEZIONE APERTA TRATTA DA ALEKSANDAR PROKIC "*Computer program for determination of geometrical properties of thin -walled beams with open - close section*"

In riferimento all'articolo "Computer program for determination of geometrical properties of thin -walled beams with open - close section" di Aleksandar Prokicpubblicazione Pergamon del 8 febbraio 1999, si calcolerà nel seguito la sezione sottile aperta il cui schema è il seguente:

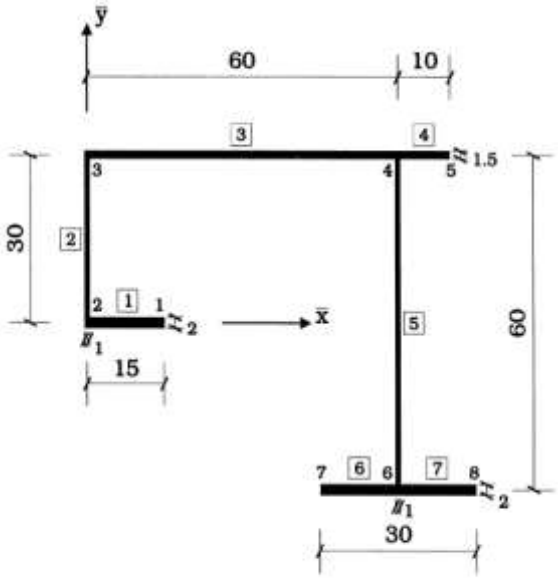


Fig. 2. Cross-section geometry.

Le caratteristiche della sezione calcolata:

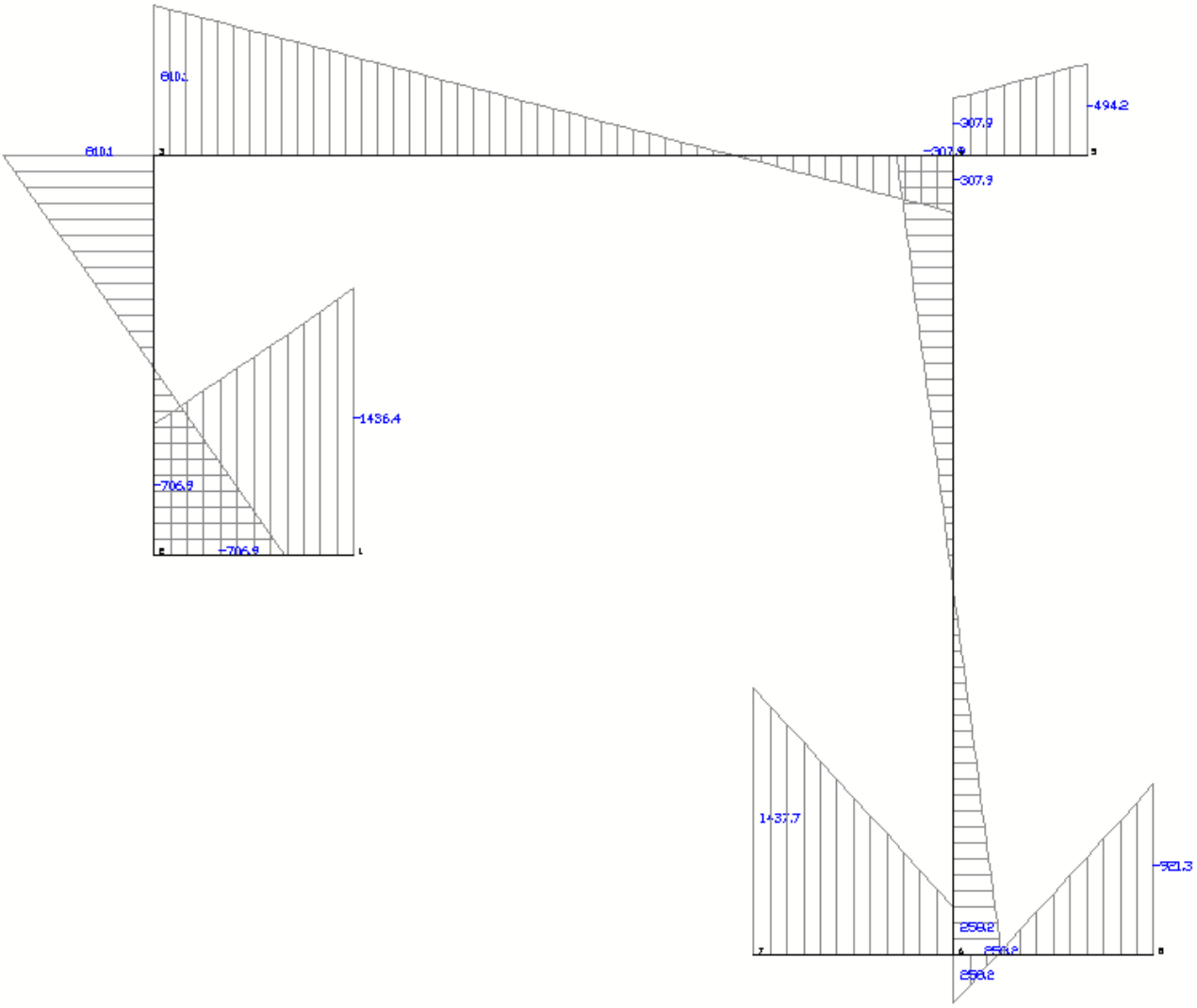
Origine nel baricentro					
A =	285.00	m²	H =	60.000	m
P =	205.00	m	W =	75.000	m
x_G =	38.95	m	S_x^{top}=	6932.10	m³
y_G =	6.32	m	S_x^{bot}=	4520.93	m³
I_x =	164181.27	m⁴	S_y^{right}=	4935.61	m³
I_y =	177941.71	m⁴	S_y^{left}=	4568.77	m³
I_{xy} =	-67855.26	m⁴			
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	-42.11	gradi	ρ_x =	19.00	m
I_{xp} =	102858.31	m⁴	ρ_y =	28.97	m³
I_{yp} =	239264.67	m⁴	W_{plx}=	6046.87	m³
I_p =	409978.24	m⁴	W_{ply}=	6196.74	m³
Centro taglio riferito a G			**Centro taglio riferito assi iniziali**		
X_C =	11.62	m	X_C =	50.57	m
Y_C =	42.32	m	Y_C =	48.63	m

J_t =	228.750	m^4	X_P =	49.29	m
I_ω =	92582111.81	m^6	Y_P =	11.25	m^4

A) Costante di ingobbamento ω (Warping function)

I valori calcolati e il grafico ottenuto:

Asta	Inizio nodo ω_{ci}	Mezzeria ω_{ck}	Nodo finale ω_{cj}
1	1436.325	718.163	706.841
2	706.841	353.421	-810.122
3	-810.122	-405.061	307.813
4	307.813	153.906	-258.260
5	-1437.744	-718.872	-258.260
6	921.224	-129.130	-258.260
7	494.136	247.068	307.813



praticamente coincidente a meno del segno con la fig. 3 dell'articolo sopra citato (C è in realtà il baricentro e P il centro di taglio)

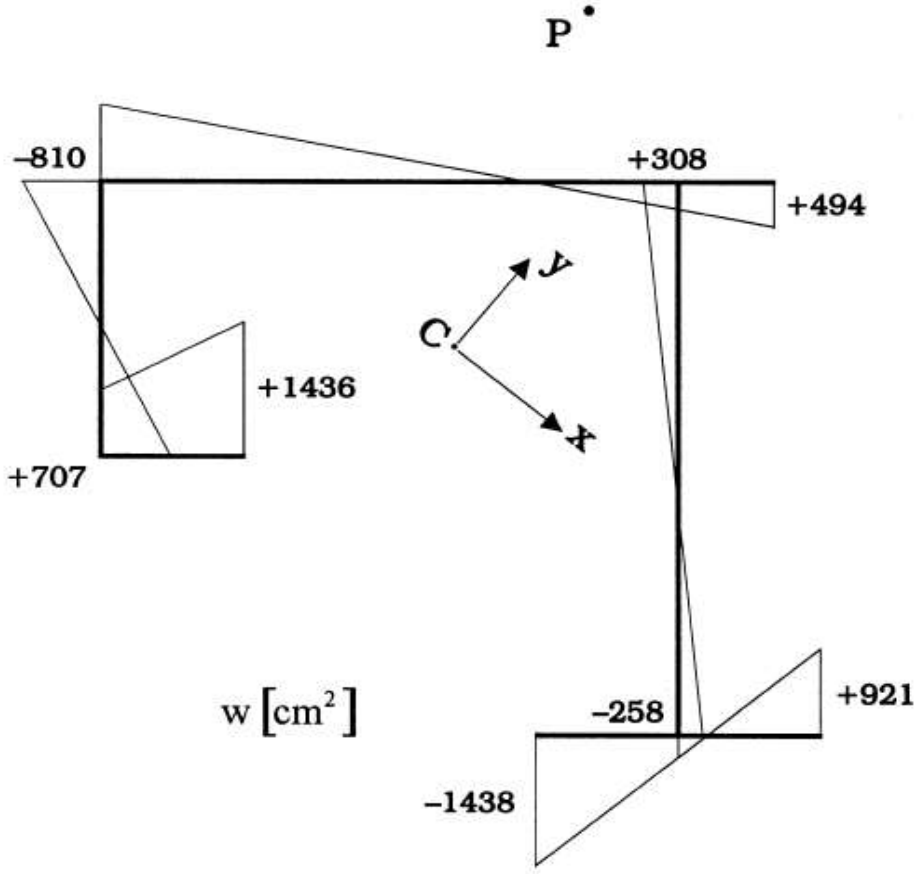


Fig. 3. Warping function.

B) Tensioni tangenziali dovute a Momento torcente M_ω= 1000 KNm con B_ω=0 % Mom. prim./Mtot=0 (torsione non uniforme):

$$\tau = \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t}$$

Graficando da programma S_ω

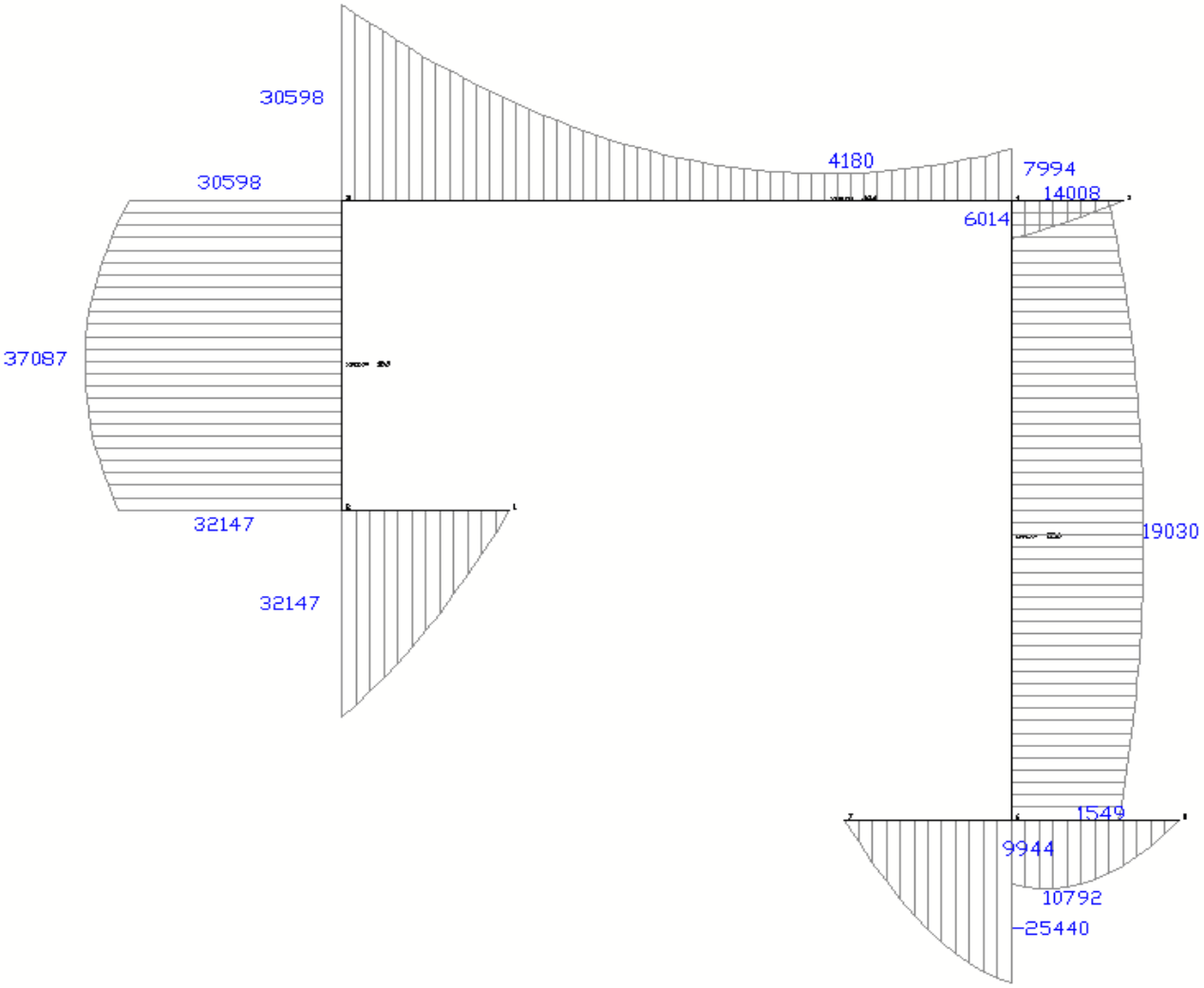


GRAFICO DEL MOMENTO STATICO SETTORIALE Sw

e moltiplicando S_ω per $M_\omega/I_\omega/t$ si ottiene:

Seg.	Nodo i	Nodo j	$\sigma_{\omega i}$ daN/cm^2	$\sigma_{\omega k}$ daN/cm^2	$\sigma_{\omega j}$ daN/cm^2	$\tau_{\omega i}$ daN/cm^2	$\tau_{\omega k}$ daN/cm^2	$\tau_{\omega j}$ daN/cm^2	$\tau_{\omega max}$ daN/cm^2
1	1	2	0.00	0.00	0.00	0.00	1015.82	1736.16	1736.16
2	2	3	0.00	0.00	0.00	3472.32	4003.10	3304.99	4005.94
3	3	4	0.00	0.00	0.00	2203.33	483.86	575.66	301.03
4	4	6	0.00	0.00	0.00	1513.14	2052.00	1673.71	2055.51
5	7	6	0.00	0.00	0.00	0.00	-925.83	-1373.92	-1373.92
6	8	6	0.00	0.00	0.00	0.00	507.40	537.06	582.87
7	5	4	0.00	0.00	0.00	0.00	241.71	433.10	433.10

praticamente coincidente con:

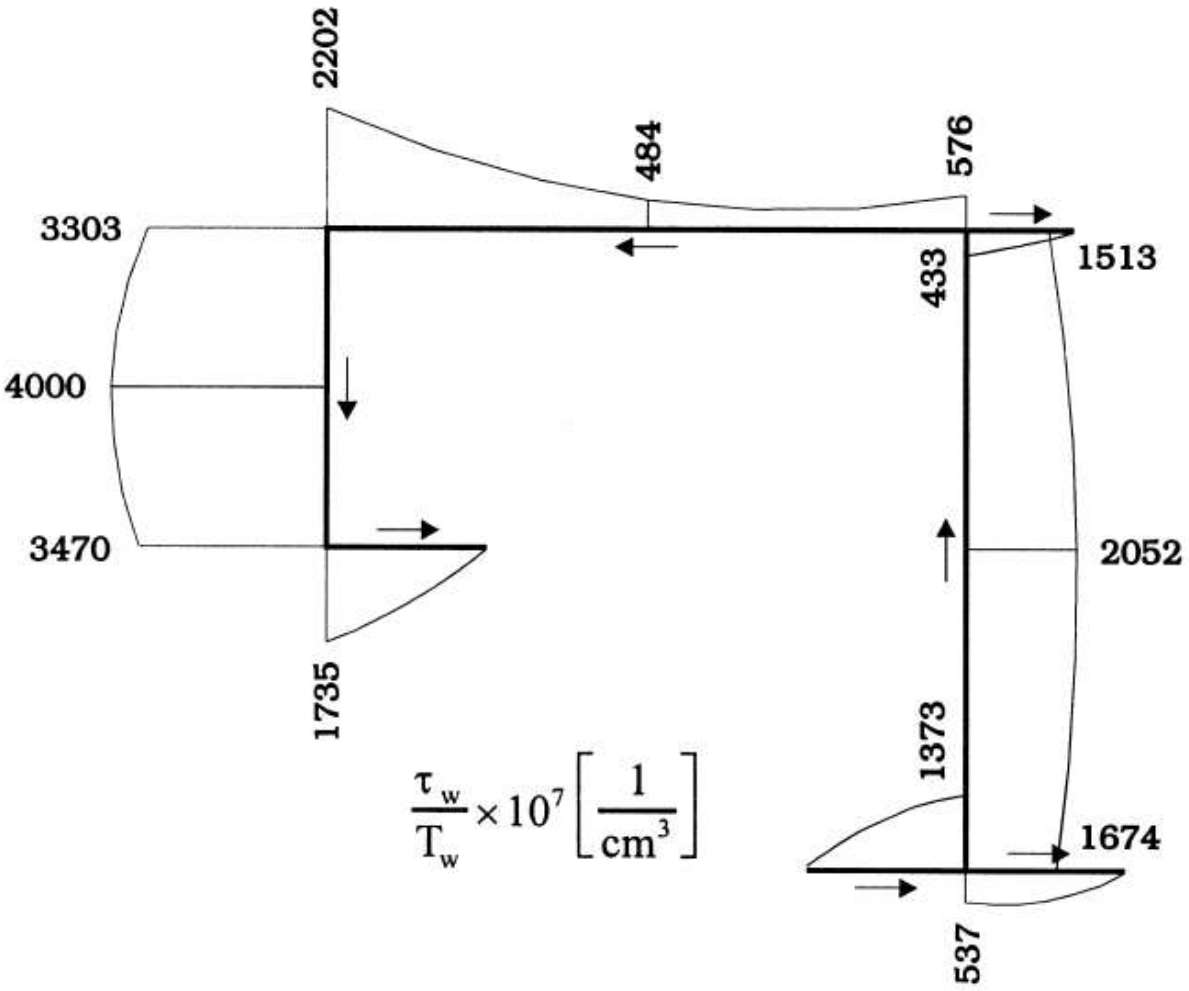
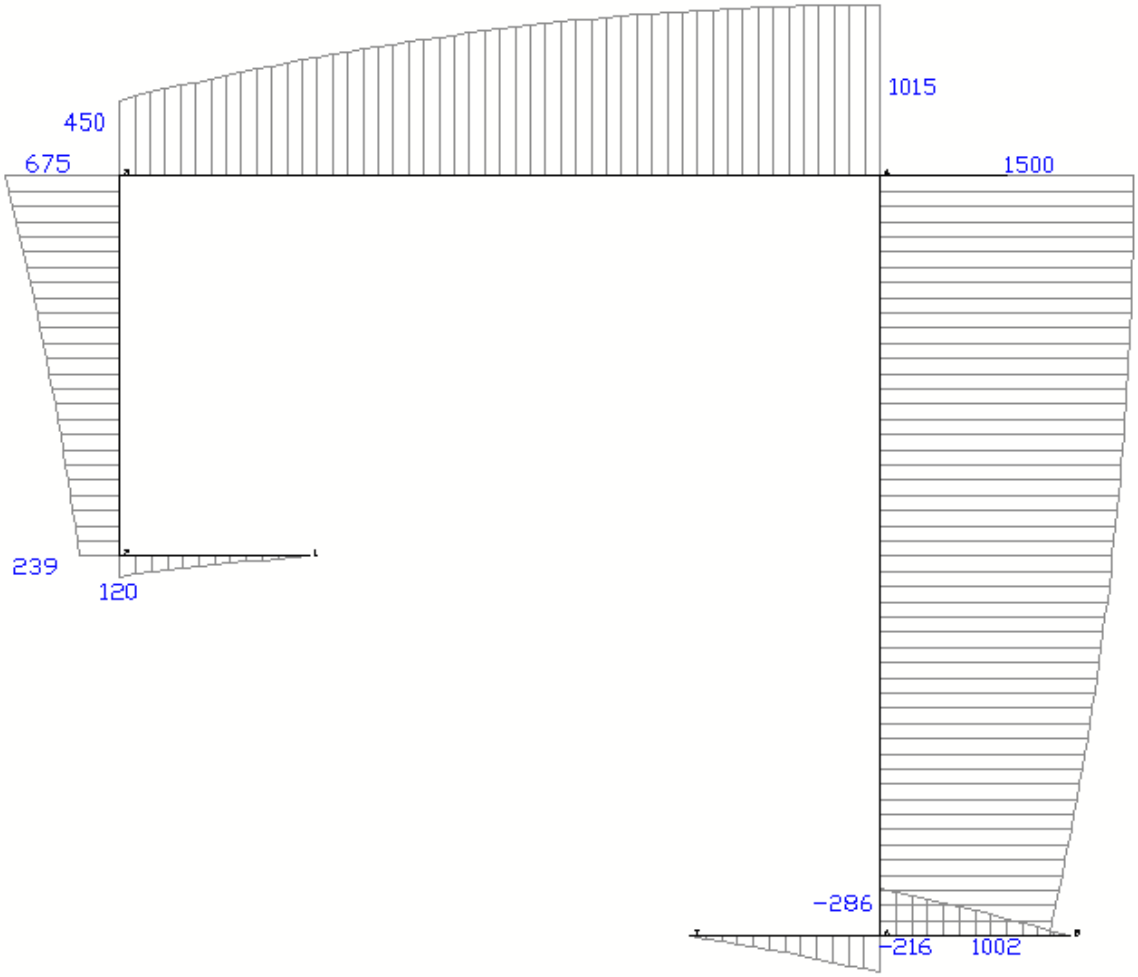
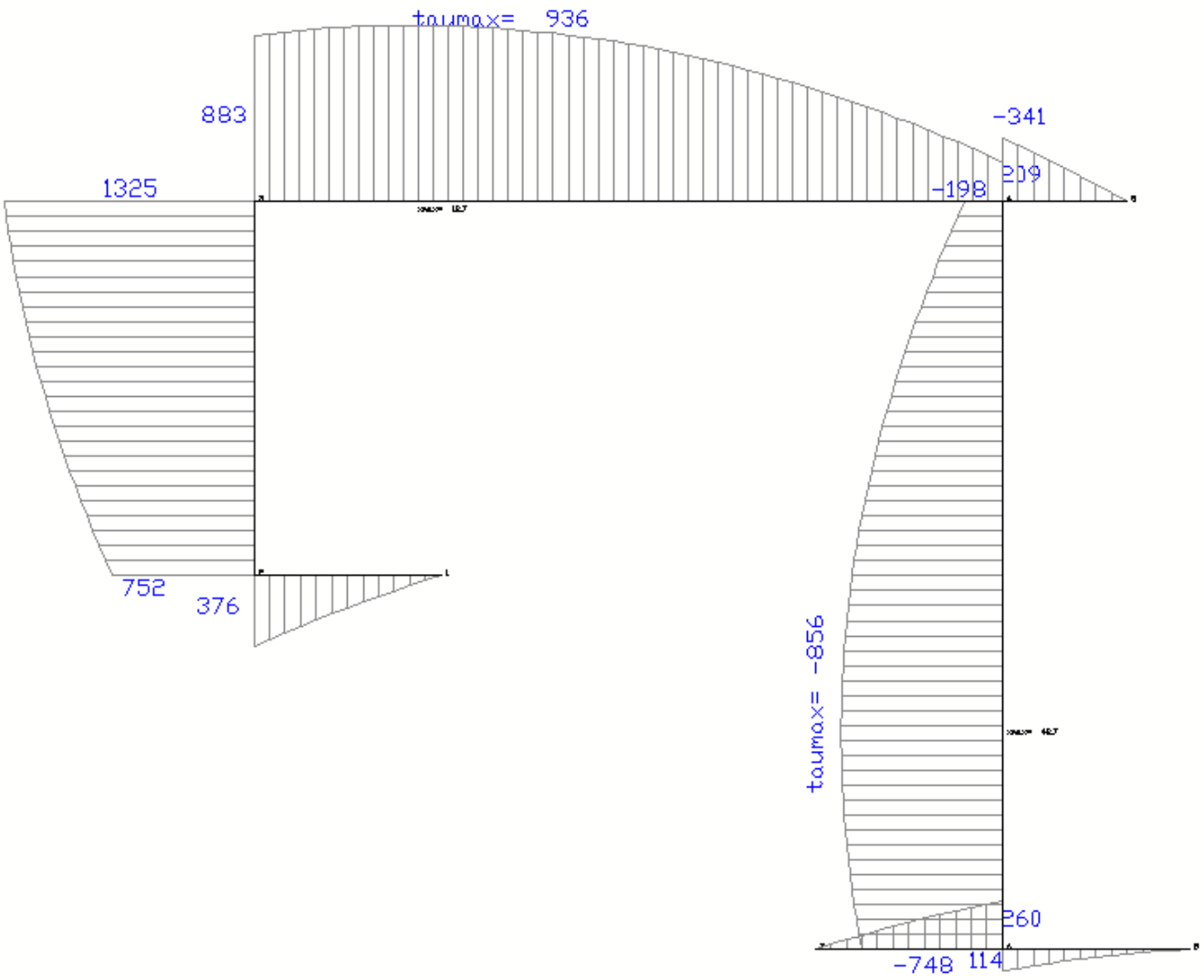


Fig. 4. Warping shear stresses due to torsion moment.

C) Tensioni tangenziali dovute a taglio orizzontale Hx=1000 KN e taglio verticale Vy=1000 KN:



TENSIONI TANGENZIALI X DOVUTE A Hx



TENSIONI TANGENZIALI Y DOVUTE A Vy

praticamente coincidenti:

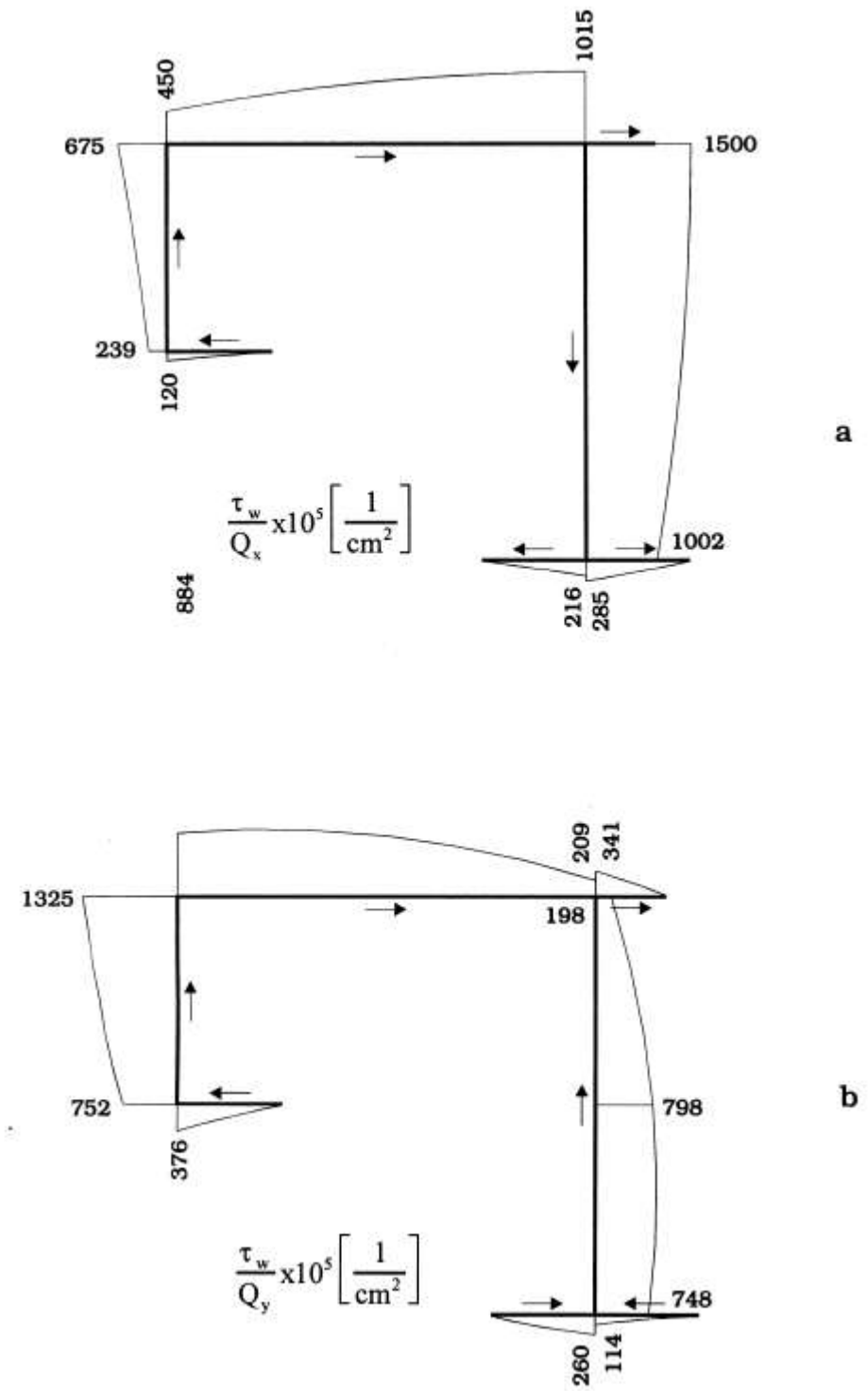
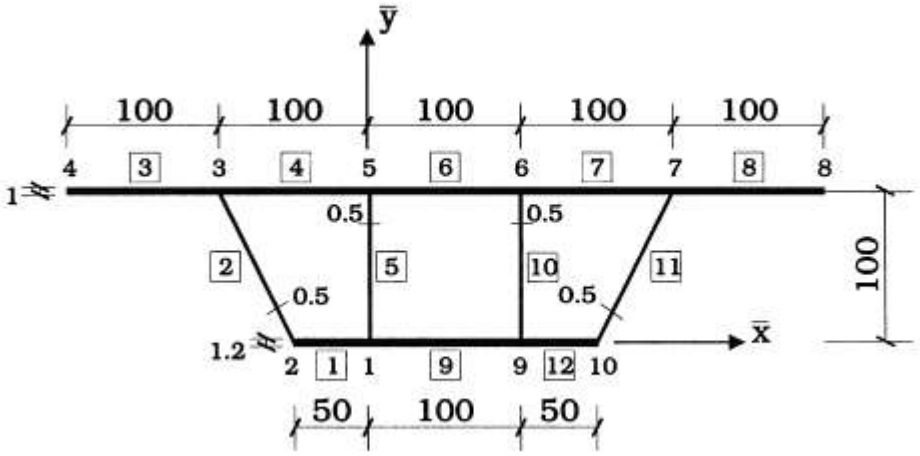


Fig. 5. Bending shear stresses due to shear forces Q_x (a) and Q_y (b).

4.9.3 VALIDAZIONE PER UNA SEZIONE CHIUSA TRATTA DA ALEKSANDAR PROKIC *"Computer program for determination of geometrical properties of thin -walled beams with open - close section"*

In riferimento all'articolo "Computer program for determination of geometrical properties of thin -walled beams with open - close section" di Aleksandar Prokicpubblicazione Pergamon del 8 febbraio 1999, si calcolerà nel seguito la sezione sottile aperta il cui schema è il seguente:



Le caratteristiche della sezione calcolata:

Origine nel baricentro					
A =	951.80	cm²	H =	100.000	cm
P =	1123.61	cm	W =	500.000	cm
x_G =	0.00	cm	S_x^{top}=	50878.61	cm³
y_G =	63.66	cm	S_x^{bot}=	29045.96	cm³
I_x =	1849016.09	cm⁴	S_y^{right}=	52947.56	cm³
I_y =	13236891.10	cm⁴	S_y^{left}=	52947.56	cm³
I_{xy} =	0.00	cm⁴	Peso =	747.17	kg/m
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	0.00	gradi	ρ_x =	44.08	cm
I_{xp} =	1849016.09	cm⁴	ρ_y =	117.93	cm³
I_{yp} =	13236891.10	cm⁴	W_{plx}=		cm³
I_p =	15085907.18	cm⁴	W_{ply}=		cm³
Centro taglio riferito a G			**Centro taglio riferito assi iniziali**		
X_C =	0.00	cm	X_C =	0.00	cm
Y_C =	-10.90	cm	Y_C =	52.76	cm
J_t =	2917505.037	cm⁴	X_P =		cm
I_ω =	1041229484.40	cm⁶	Y_P =		cm⁴

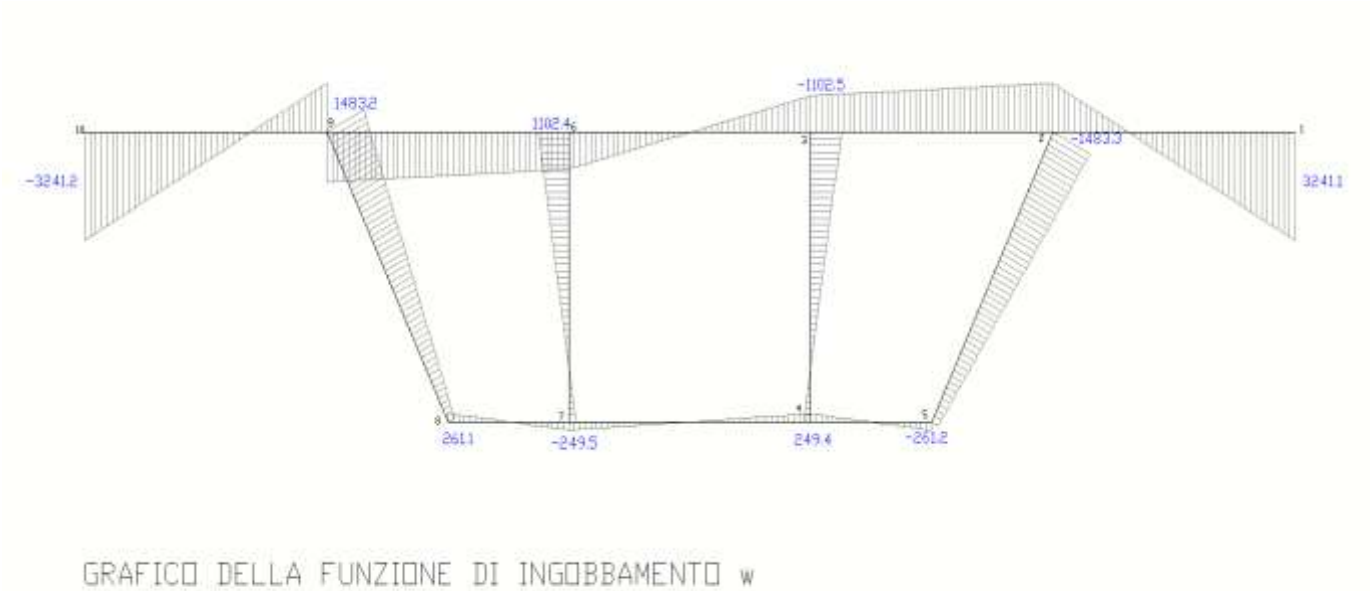
A) Costante di ingobbamento ω (Warping function)

I valori calcolati e il grafico ottenuto:

Funzione di ingobbamento ω_C rispetto a C (warping coordinates)

Nodo	ω_C cm²
1	-3241.124
2	1483.289
3	1102.451
4	-249.421
5	261.184
6	-1102.451
7	249.421
8	-261.184
9	-1483.289
10	3241.124

Asta	Inizio nodo ω_{Ci}	Mezzeria ω_{Ck}	Nodo finale ω_{Cj}
1	-3241.124	-878.917	1483.289
2	1483.289	1292.870	1102.451
3	1102.451	0.000	-1102.451
4	-1102.451	-1292.870	-1483.289
5	3241.124	878.917	-1483.289
6	-1483.289	-872.237	-261.184
7	249.421	-426.515	-1102.451
8	-249.421	426.515	1102.451
9	261.184	872.237	1483.289
10	-261.184	-5.882	249.421
11	249.421	0.000	-249.421
12	-249.421	5.882	261.184



praticamente coincidente a meno del segno con la fig. 7 dell'articolo sopra citato (C è in realtà il baricentro e P il centro di taglio)

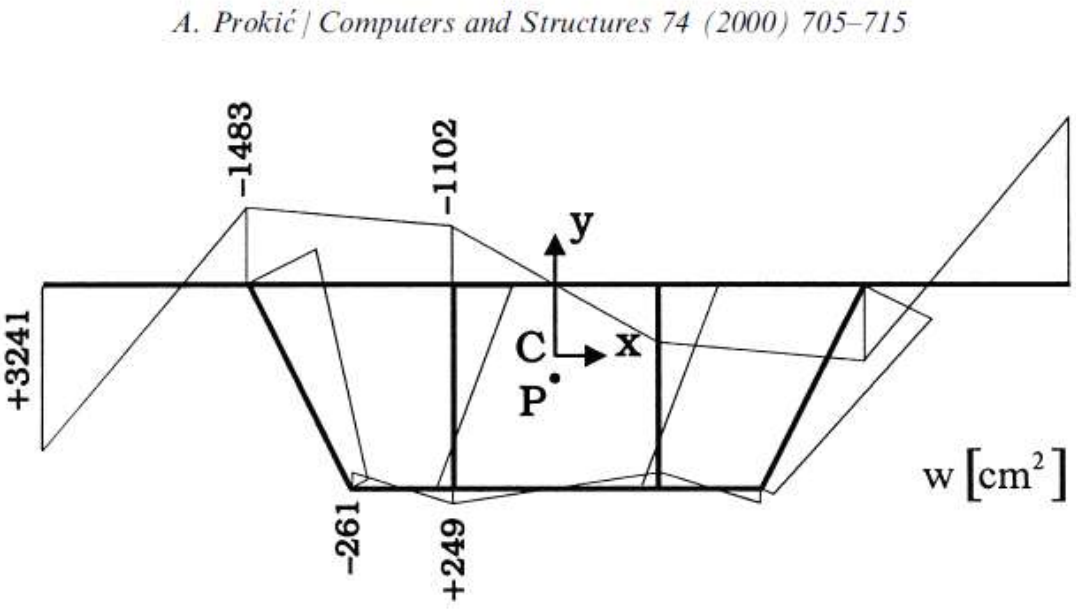
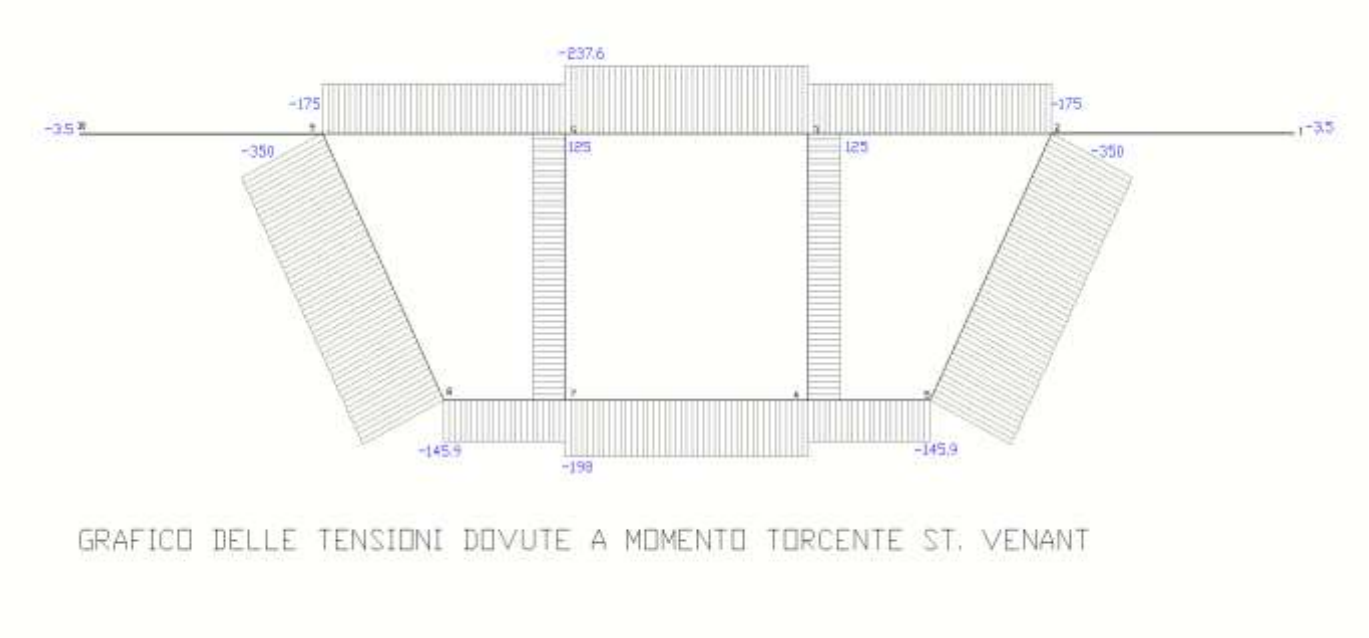


Fig. 7. Warping function.

B) Tensioni tangenziali dovute a Momento torcente Mt=1000 KNm senza considerare il momento torcente provocato dall'eccentricità del centro di taglio.



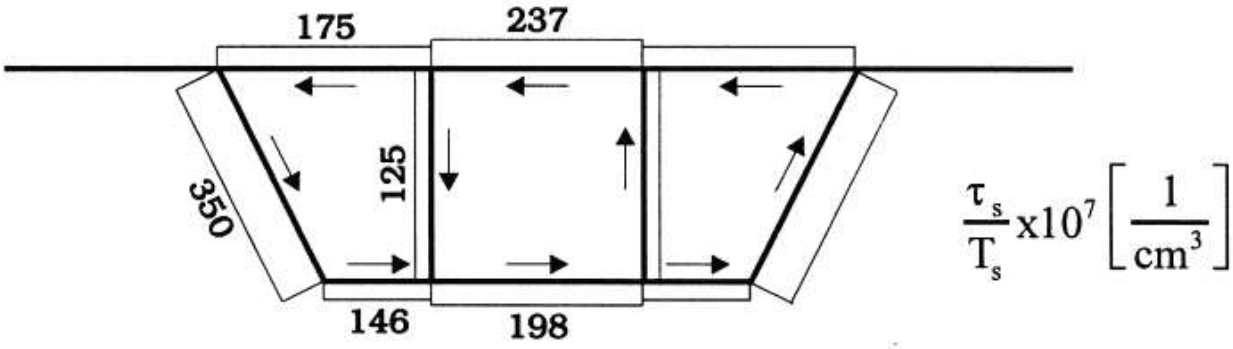
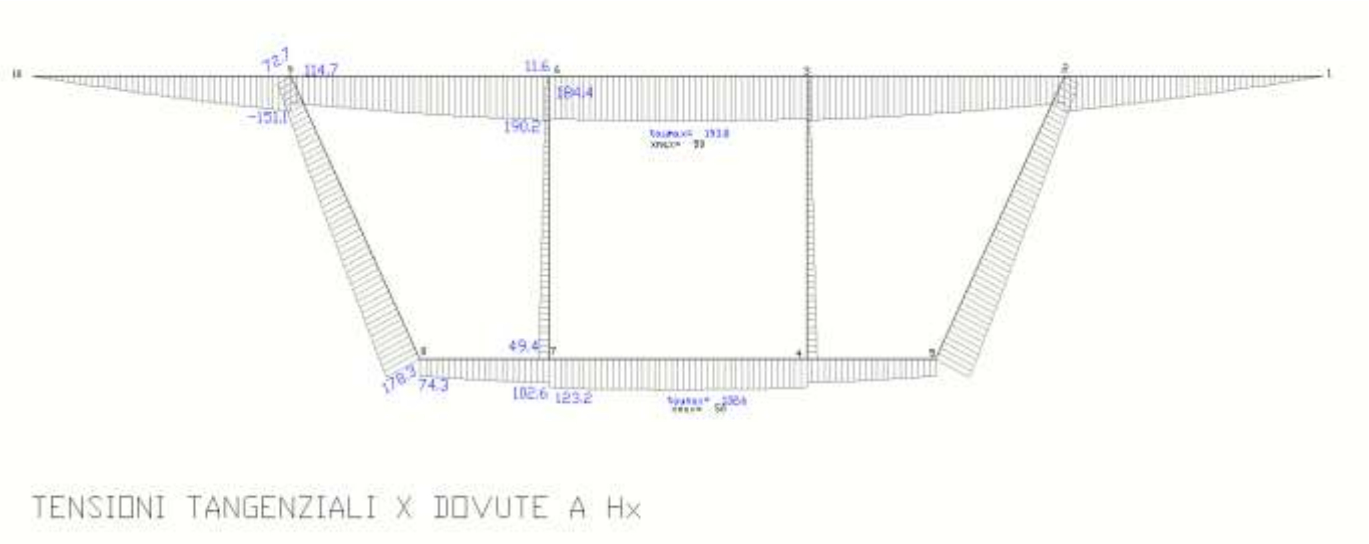
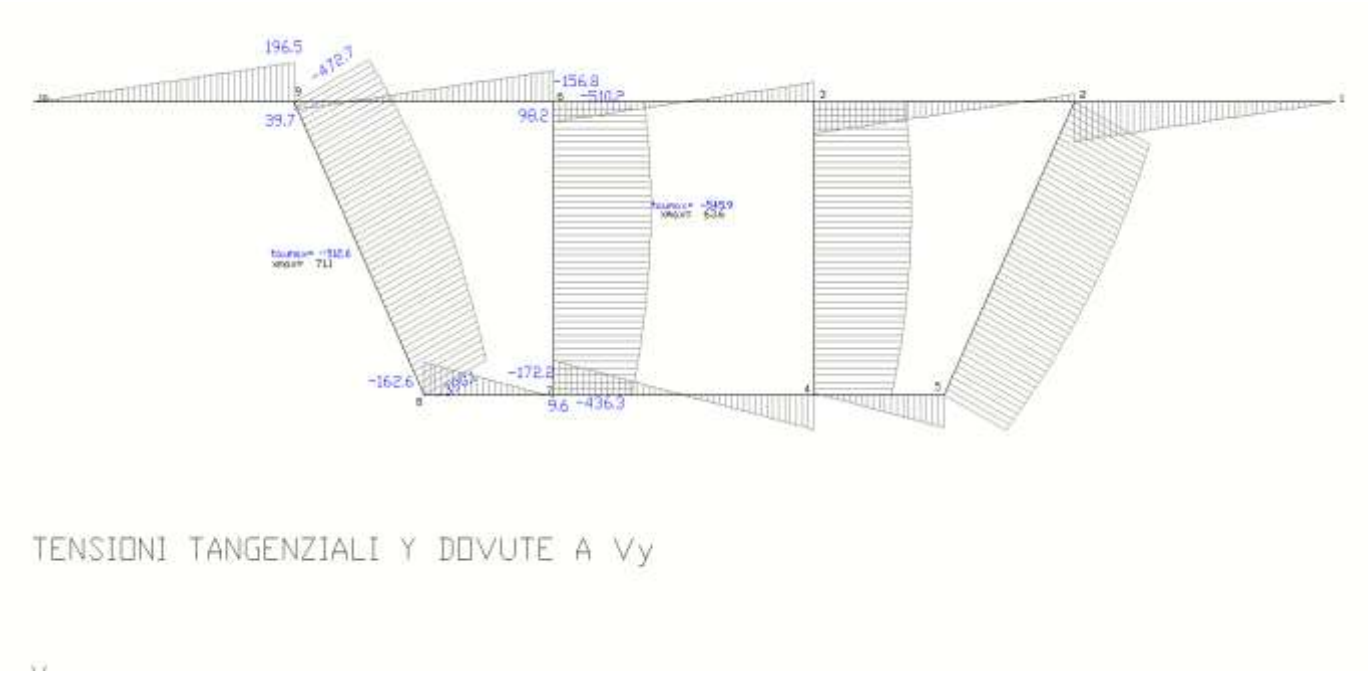


Fig. 8. Shear stresses due to torsion moment: (a) Saint Venant and (b) warping.

C) Tensioni tangenziali dovute a taglio orizzontale Hx=1000 KN e taglio verticale Vy=1000 KN:





A. Prokić / Computers and Structures 74 (2000) 705–715

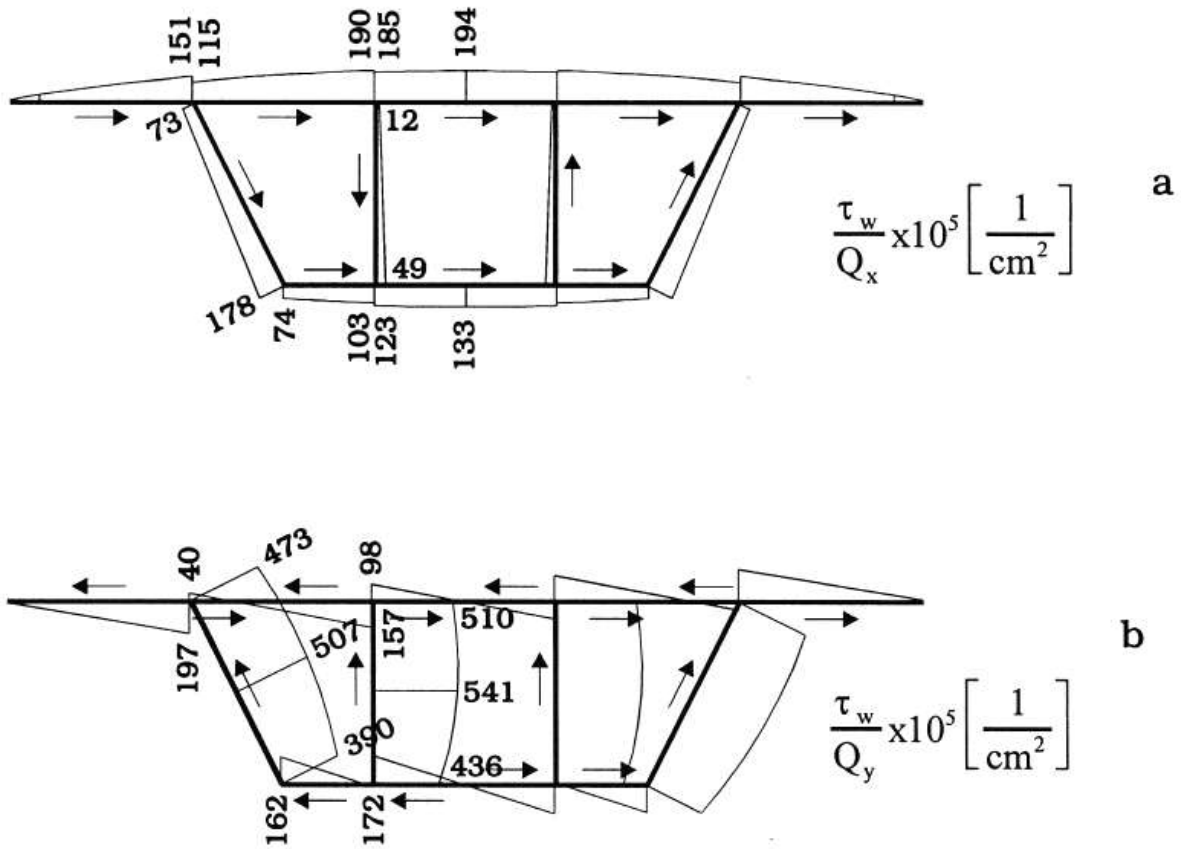


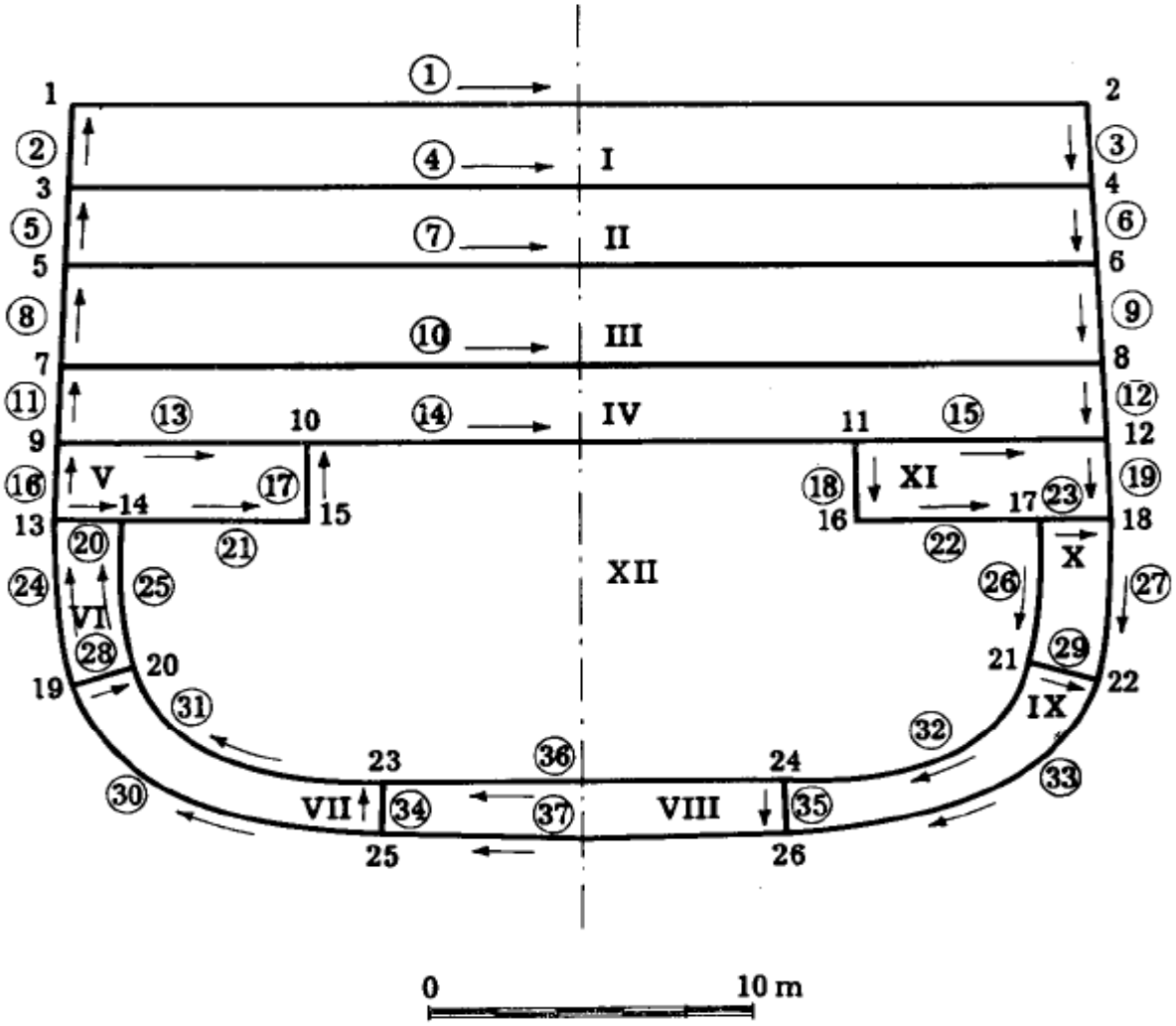
Fig. 9. Bending shear stresses due to shear forces Q_x (a) and Q_y (b).

4.10 METODI APPROSSIMATI PER PROFILI CHIUSI PLURICELLULARI

Il software per il calcolo della torsione in sezioni pluriconnesse è stato affrontato al capitolo 2.2.
Per una certa tipologia di sezioni, soprattutto quando le maglie sono annidate l'una nell'altra, il determinante della matrice D e la costante di torsione vanno in *overflow.* L'errore nasce perché tutto il sistema, incluso il calcolo delle tensioni torsionali e di taglio, oltre a:

- FUNZIONE DI INGOBBAMENTO ω (s)
- MOMENTO STATICO DI INGOBBAMENTO S_ω (s)
- COSTANTE DI INGOBBAMENTO I_ω

è basato sul taglio fittizio delle maglie per rendere monoconnessa la sezione, trasformandola in un profilo aperto ed eseguendo una correzione finale per riportare il calcolo alla sezione reale.
Se osserviamo la sezione dello scafo del transatlantico *Poseidon*, indicato in "*Scienza delle Costruzioni Vol.II - Liguori editore, Napoli*" di Vincenzo Franciosi – Cap X pag 317 nella figura sotto riportata, si osserva che se si eseguono i tagli fittizi in ogni maglia con l'accortezza di evitare la separazione lungo le aste di confine, la maglia XII non può essere tagliata se non rendendola disconnessa con due tagli nella stessa maglia.



Sono presenti software, molti più efficienti del mio, per risolvere questo problema. Nei capitoli successivi affronto due metodi approssimati molto semplici per il calcolo del momento torsionale Jt e per il computo delle tensioni tangenziali torsionali in questo tipo di sezioni.

4.10.1 IL CALCOLO APPROSSIMATO DEL MOMENTO TORSIONALE JT

Se indichiamo con:

Mt	Momento torcente agente sulla sezione
Ω_i	Area della maglia i
G	Modulo di elasticità
q_i	Flusso di taglio della maglia i
Θ	Angolo di torsione
L_i/δ_i	Rapporto tra la lunghezza di un'asta della maglia ed il suo spessore
n	Numero di maglie

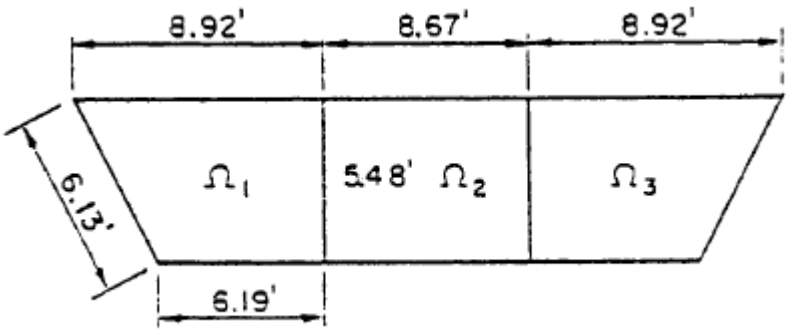
L'equazione di equilibrio per n maglie:

$$M_t = 2\sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \Omega_i$$

ed esplicitando la formula dell'angolo di torsione per trovare Jt:

$$J_t = \frac{2\sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \Omega_i}{G \cdot \Theta}$$

Esempio: sezione a tre maglie con le lunghezze Li esplicitate sul disegno



Ω_1	= 41.40 ft²	area della maglia 1	δ_{sup}	= 0.56 ft	spessore per il corrente superiore
Ω_2	= 47.51 ft²	area della maglia 2	δ_{inf}	= 0.48 ft	spessore per il corrente inferiore
Ω_3	= 41.40 ft²	area della maglia 3	δ_h	= 1.00 ft	spessore per le aste di parete

$$S_{11} = S_{33} = \frac{1}{G}\sum_{i}^{n}\frac{L_i}{\delta_i} = \frac{1}{G}\cdot\left(\frac{8.92}{0.56}+\frac{6.19}{0.48}+\frac{6.13}{1.0}\right) = \frac{4.44}{G} \quad \text{per la maglia 1 e 3}$$

$$S_{12} = S_{21} = S_{23} = S_{32} = -\frac{5.48}{G} \quad \text{per le aste di confine tra la maglia 1 e 2, 2 e 3}$$

$$S_{22} = \frac{1}{G}\sum_{i}^{n}\frac{L_i}{\delta_i} = \frac{44.50}{G} \quad \text{per la maglia 2}$$

Il sistema a 3 incognite permette di trovare i valori q1 q2 q3

40.44 q1-5,48 q2 = 82.8 GΘ per la maglia 1
-5.48 q1+44.50 q2-5.48 q3 = 95.02 GΘ per la maglia 2
-5.48 q2 +40.44 q3 =82.8 GΘ per la maglia 3

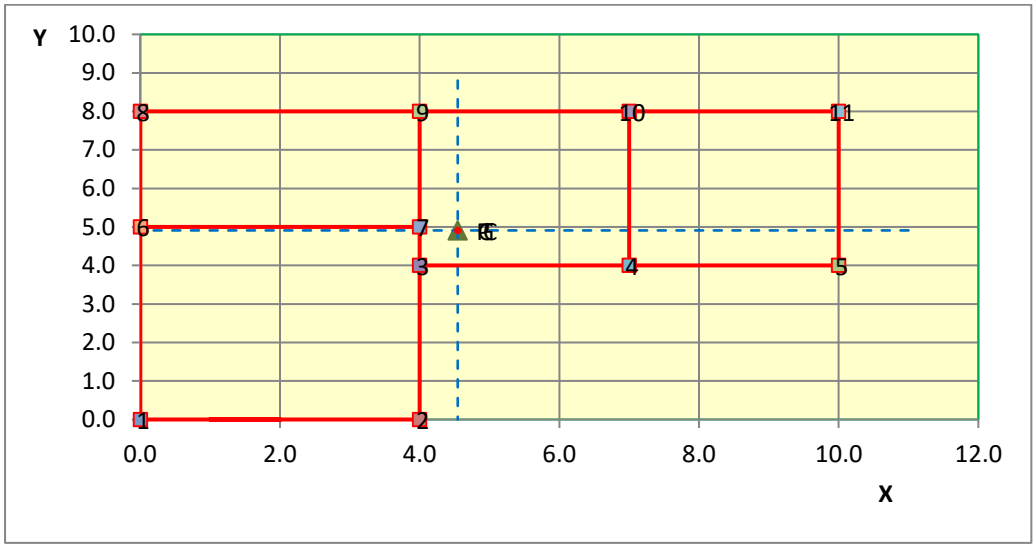
q1 = 2.42 GΘ
q2 = 2.73 GΘ
q3 = 2.42 GΘ

Jt= 2/ GΘ·(2.42·41.40+2.73·47.51+2.42·41.40) = 660 ft^4

Questo calcolo è inserito nel foglio elettronico excel Profilo chiuso1.xlsm.

4.10.2 CALCOLO APPROSSIMATO DELLE TENSIONI TORSIONALI

Si rimanda per la trattazione teorica alla dispensa "*Scienza delle Costruzioni Vol.II - Liguori editore, Napoli*" di Vincenzo Franciosi – Cap X pag 320 ed in particolare all'esempio citato di una sezione a 4 maglie: i dati possono essere caricati dal file excel ''Archivio sezioni.xlsm" con il codice 30.



Nodo	x	y	num°
1	0.000	0.000	1
2	4.000	0.000	2
3	4.000	4.000	3
4	7.000	4.000	1
5	10.000	4.000	1,2
6	0.000	5.000	2,3
7	4.000	5.000	3
8	0.000	8.000	1,4
9	4.000	8.000	4,2
10	7.000	8.000	2
11	10.000	8.000	3
			4
			4
			4

Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore
1	8	9	0.020
2	9	10	0.020
3	10	11	0.020
4	8	6	0.020
5	9	7	0.010
6	10	4	0.010
7	11	5	0.015
8	6	7	0.010
9	7	3	0.010
10	3	4	0.015
11	4	5	0.015
12	1	6	0.020
13	1	2	0.015
14	2	3	0.015

Maglia	Ω	Aste					$c_{ai}=\Sigma L_i/s_i$	num.aste
1	12.00	1	5	8	4		1050.00	4
2	12.00	2	5	6	9	10	1150.00	5
3	12.00	3	6	7	11		1016.67	4
4	20.00	8	9	12	13	14	1283.33	5
	56.00							

Asta	Maglia 1	Maglia 2	L_i/δ_i
1	1	0	200.00
2	2	0	150.00
3	3	0	150.00
4	1	0	150.00
5	1	2	300.00
6	2	3	400.00
7	3	0	266.67
8	1	4	400.00
9	4	2	100.00
10	2	0	200.00
11	3	0	200.00
12	4	0	250.00
13	4	0	266.67
14	4	0	266.67

Se indichiamo con

N	Numero di maglie
nm_i	Numero di aste relative alla maglia i
$c_{ai}=L_j/\delta_j$	Rapporto tra la lunghezza di un'asta j della maglia i ed il suo spessore

e

$$c_i = \frac{4 \cdot \Omega_i^2}{\sum_{j=1}^{nm_i} \frac{L_j}{\delta_j}} \qquad r_i = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$$

Per esempio per la maglia 1 avremo: $4 \cdot 12^2/1050=0.5486$

Maglia	c_i	r_i
1	0.5486	0.1916
2	0.5009	0.1750
3	0.5666	0.1979
4	1.2468	0.4355

2.8628

Si devono costruire due matrici di ordine nxn ed in questo caso essendo 4 le maglie saranno due matrici 4x4. La prima che chiamiamo [2GΘ] avrà il termine generico sulla diagonale uguale a:

$$[2G\Theta]_{i,i} = \frac{ca_i}{2 \cdot \Omega_i^2}$$ e per l'elemento 2,2 si avrà 1150/(2·12·12)= 3.993

Per i termini i diverso da j:

$$2G\Theta]_{i,j} = -\frac{L_{i,j} / \delta_{i,j}}{2 \cdot \Omega_i \Omega_j}$$ e per l'elemento 1,2 si avrà -300//(2·12·12)= -1.042 relativa all'asta di confine tra la maglia 1 e 2

La matrice completa con i suoi coefficienti:

	M1	M2	M3	M4
$2G\Theta_1$	3.646	-1.042	0.000	-0.833
2GΘ2	-1.042	3.993	-1.389	-0.208
2GΘ3	0.000	-1.389	3.530	0.000
2GΘ4	-0.833	-0.208	0.000	1.604

L'altra matrice che chiameremo [ΔM] avrà il termine generico sulla diagonale uguale a:

$$[\Delta M]_{i,i} = \frac{2 \cdot \Omega_i^2}{ca_i}(r_i - 1)$$ e per l'elemento 4,4 si avrà $(2 \cdot 20^2)/1283.33 \cdot (0.4355-1)$= -0.3519

Per i termini i diverso da j:

$$[\Delta M]_{i,j} = \frac{2 \cdot \Omega_j^2}{ca_j}(r_i - 1)$$ e pr l'elemento 1,4 si avrà $(2 \cdot 20^2)/1283.33 \cdot 0.1916$= 0.1195

La matrice completa con i suoi coefficienti:

	$2G\Theta_1$	2GΘ2	2GΘ3	2GΘ4
Δ M1	-0.2217	0.0480	0.0543	0.1195
Δ M2	0.0480	-0.2066	0.0496	0.1091
Δ M3	0.0543	0.0496	-0.2272	0.1234
Δ M4	0.1195	0.1091	0.1234	-0.3519

Ora sarà necessario ripartire il momento torcente agente sull'intera sezione Mt = 10000 tm con un procedimento iterativo in questo modo:

in prima approssimazione Mi=ri·Mt

M1	19162	tm
M2	17496	tm
M3	19791	tm
M4	43551	tm

$M1 \cdot 2G\Theta_1 + M2 \cdot 2G\Theta_2 + M3 \cdot 2G\Theta_3 + M4 \cdot 2G\Theta_4 = 15345\ tm^{-3}$

$2G\Theta_1$	15345	tm^{-3}
$2G\Theta 2$	13342	tm^{-3}
$2G\Theta 3$	45563	tm^{-3}
$2G\Theta 4$	50249	tm^{-3}

E nella stessa maniera ognuno di questi ultimi termini per la matrice [ΔM]. Otteniamo:

Δ M1	5714	tm
Δ M2	5718	tm
Δ M3	-2659	tm
Δ M4	-8773	tm

Alla seconda approssimazione avremo i nostri momenti di calcolo dati M1+ΔM1:

M1	24876	tm
M2	23215	tm
M3	17132	tm
M4	34778	tm

Si itera come al punto precedente per n volte fino a quando la somma dei ΔM non è inferiore ad un certo valore, per esempio 1/100 del valore precedente. A questo punto avremo i nostri momenti di cella che divisi per $2 \cdot \Omega_i$ ci permetteranno di computare i flussi di cella qi:

M finali:				qi	
M1	23596	tm	1	983.15	t/m
M2	22550	tm	2	939.57	t/m
M3	18183	tm	3	757.61	t/m
M4	35672	tm	4	891.80	t/m

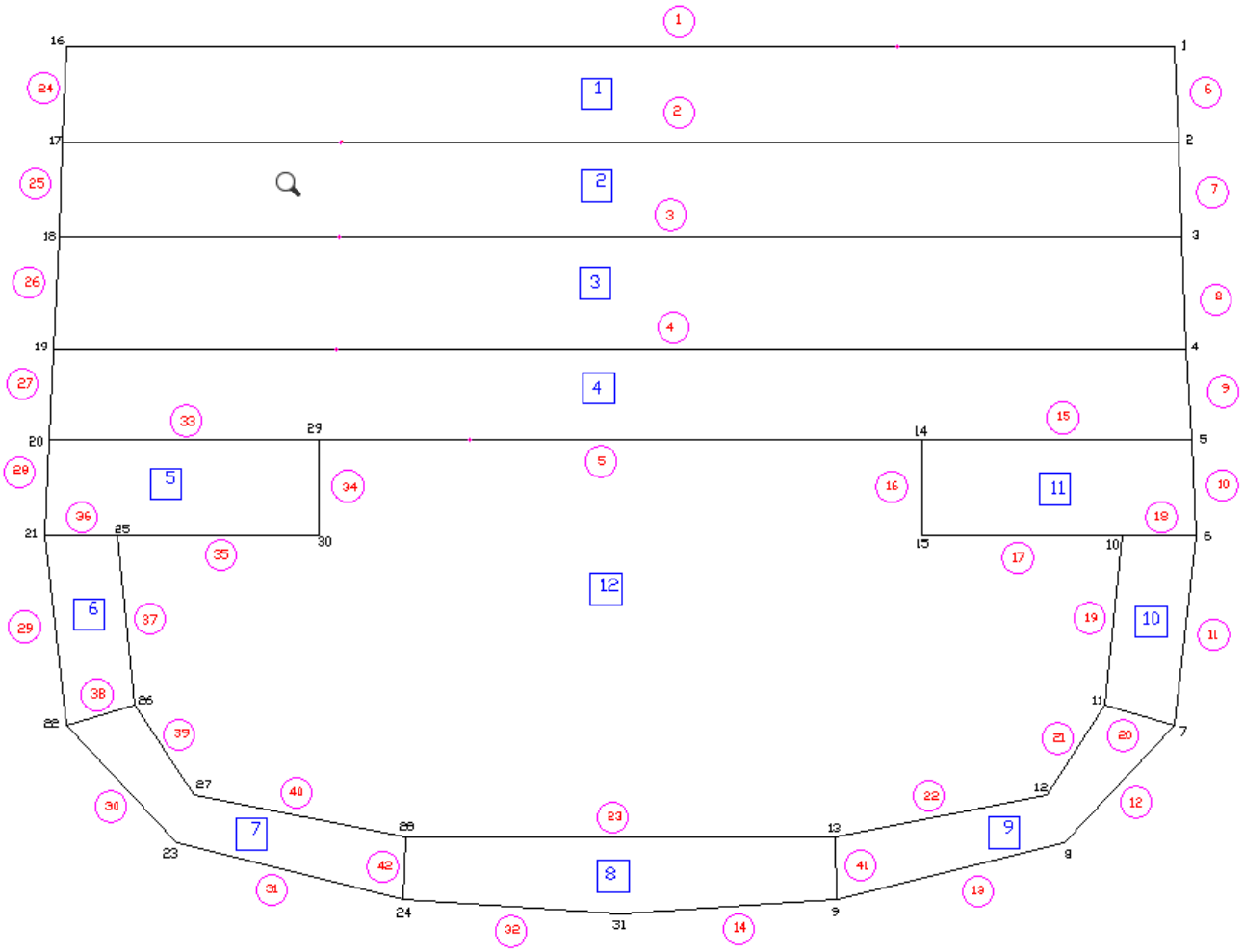
E dividendo per lo spessore di ogni asta si ottiene la tensione. Per le aste di confine sarà necessario eseguire la differenza tra le due tensioni:

				daN/cmq	daN/cmq	daN/cmq
Asta	**maglia1**	**maglia2**	**Spessore**	τ_1	τ_2	τ
1	1	0	0.020	492	0	492
2	2	0	0.020	470	0	470
3	3	0	0.020	379	0	379
4	1	0	0.020	492	0	492
5	1	2	0.010	983	940	44
6	2	3	0.010	940	758	182
7	3	0	0.015	505	0	505
8	1	4	0.010	983	892	91
9	4	2	0.010	892	940	-48
10	2	0	0.015	626	0	626
11	3	0	0.015	505	0	505
12	4	0	0.020	446	0	446
13	4	0	0.015	595	0	595
14	4	0	0.015	595	0	595

Praticamente uguali al calcolo di base ottenuto con il file excel Profilo chiuso.xlsm

Si fa riferimento alla sezione dello Scafo a 12 maglie - articolo G.Alfano - F. Marotti de Sciarra - L. Rosati "Automatic analysis of multicell thin-walled sections" pag. 654 per il calcolo approssimato delle tensioni torsionali.

La sezione è stata schematizzata ed inserita al numero 51 del file excel *Archivio delle sezioni.xlsm.* Cliccando su questa sezione il programma rimanda al file Profilo chiuso1.xlsm per una risoluzione di calcolo semplificata, senza il computo delle caratteristiche settoriali e di conseguenza della torsione non uniforme, ma solo con la verifica a pressoflessione, torsione e taglio. Il calcolo con il file di base Profilo chiuso.xlsm non è risolvibile perché come si può evincere dalla figura sottostante ci sono maglie annidate.



Di seguito le coordinate dei nodi, le aste dal nodo iniziale al finale e il numero della maglia/maglie a cui appartiene l'asta.

Coordinate dei nodi			maglia					Interruzione
Nodo	x	y	num°	Asta	Inizio nodo	Nodo finale	Spessore	s/d
1	16.000	0.000	1	1	1	16	0.028	
2	16.100	-2.750	1,2	2	17	2	0.023	
3	16.200	-5.500	2,3	3	18	3	0.011	
4	16.350	-8.750	3,4	4	19	4	0.008	
5	-16.500	-11.350	4,12	5	29	14	0.008	
6	-16.600	-14.100	1	6	2	1	0.035	
7	-16.000	-19.570	2	7	3	2	0.025	
8	-12.800	-22.950	3	8	4	3	0.025	
9	-6.250	-24.600	4	9	5	4	0.025	
10	-14.500	-14.100	11	10	6	5	0.025	d
11	-14.000	-18.970	10	11	7	6	0.026	d
12	-12.300	-21.600	9	12	8	7	0.028	
13	-6.200	-22.800	9	13	9	8	0.028	d
14	-8.700	-11.350	8	14	31	9	0.028	
15	-8.700	-14.100	4,11	15	14	5	0.01	
16	-16.000	0.000	11,12	16	14	15	0.01	d
17	-16.100	-2.750	11,12	17	15	10	0.008	
18	-16.200	-5.500	10,11	18	6	10	0.008	
19	-16.350	-8.750	10,12	19	10	11	0.012	
20	-16.500	-11.350	9,10	20	7	11	0.012	
21	-16.600	-14.100	9,12	21	12	11	0.018	
22	-16.000	-19.570	9,12	22	13	12	0.018	
23	-12.800	-22.950	8,12	23	13	28	0.018	
24	-6.250	-24.600	1	24	16	17	0.035	d
25	-14.500	-14.100	2	25	17	18	0.025	d
26	-14.000	-18.970	3	26	18	19	0.025	d
27	-12.300	-21.600	4	27	19	20	0.025	d
28	-6.200	-22.800	5	28	20	21	0.025	d
29	-8.700	-11.350	6	29	21	22	0.026	d
30	-8.700	-14.100	7	30	22	23	0.028	
31	0.000	-25.000	7	31	23	24	0.028	d
			8	32	24	31	0.028	d
			4,5	33	20	29	0.008	
			5,12	34	30	29	0.010	
			5,12	35	25	30	0.008	
			5,6	36	21	25	0.008	
			6,12	37	26	25	0.012	

			6,7	38	22	26	0.012	
			7,12	39	26	27	0.018	
			7,12	40	27	28	0.018	
			8,9	41	9	13	0.018	
			7,8	42	24	28	0.018	

Risolvendo si ottengono le caratteristiche principali:

Caratteristiche principali					
A =	5.53	m²	H =	25.000	m
P =	306.84	m	W =	33.200	m
x_G =	0.00	m	S_x^{top}=	40.67	m^3
y_G =	-11.15	m	S_x^{bot}=	32.75	m^3
I_x =	453.53	m^4	S_y^{right}=	41.92	m^3
I_y =	695.79	m^4	S_y^{left}=	41.92	m^3
I_{xy} =	0.00	m^4	Peso =	43399.91	kg/m
Proprietà della sezione rispetto assi principali					
φ_p =	0.00	gradi	ρ_x =	9.06	m
I_{xp} =	453.53	m^4	ρ_y =	11.22	m^3
I_{yp} =	695.79	m^4	W_{plx}=	3.30	m^3
I_p =	1149.32	m^4	W_{ply}=	39.37	m^3

Applicando i carichi previsti nell'esempio:

N (KN)	120000.00
Mx (KNm)	3000000.00
My (KNm)	1300000.00
Hx (KN)	20000.00
Vy (KN)	28000.00
Mt (KNm)	1100000.00

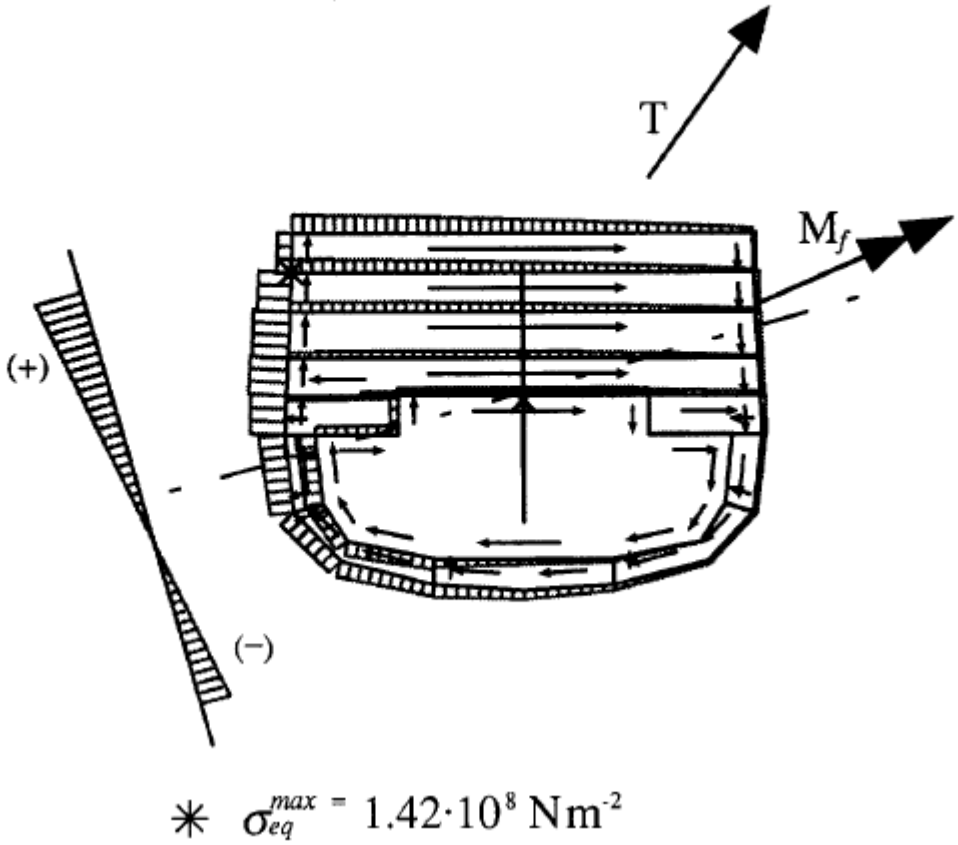
Si ottengono le sollecitazioni seguenti:

asta	Pressoflessione		Taglio		Torsione		Impegno
	σ_N (daN/cm^2)	σ_{tot} (daN/cm^2)	τ_x (daN/cm^2)	τ_y (daN/cm^2)	τ_{Mt} (daN/cm^2)	σ_{id} (daN/cm^2)	%
1	217.05	1253.66	-110.41	115.30	213.31	1309.39	58.50
2	217.05	1073.62	-83.79	96.70	-101.50	1084.53	48.46
3	217.05	893.58	-56.90	77.83	-17.66	893.60	39.93
4	217.05	681.40	-24.75	55.37	79.64	707.66	31.62
5	217.05	366.49	65.23	-108.82	82.82	372.73	16.65
6	217.05	1253.66	-104.94	9.54	170.65	1260.41	56.32
7	217.05	1073.62	-235.94	28.06	332.29	1095.03	48.93
8	217.05	893.58	-269.06	28.27	340.06	909.97	40.66
9	217.05	681.40	-278.76	29.16	314.57	690.63	30.86
10	217.05	512.22	-227.86	18.07	206.66	512.25	22.89
11	217.05	332.18	-178.03	6.67	202.30	336.48	15.03
12	217.05	324.22	175.98	95.85	146.19	793.32	35.45
13	217.05	555.75	-94.29	29.82	146.19	573.49	25.62
14	217.05	698.98	87.71	34.98	188.54	882.71	39.44
15	217.05	512.22	-149.75	-34.50	337.24	576.70	25.77
16	217.05	366.49	170.28	116.28	-203.53	393.70	17.59
17	217.05	292.95	-198.96	46.39	-254.42	763.37	34.11
18	217.05	332.18	-66.88	-58.39	11.65	386.10	17.25
19	217.05	292.95	-160.96	-28.05	-161.84	674.62	30.14
20	217.05	40.86	35.36	-152.24	-97.20	373.06	16.67
21	217.05	244.27	-523.20	18.28	-172.70	1198.82	53.56
22	217.05	437.62	-480.80	1.75	-172.70	1210.71	54.10
23	217.05	669.30	69.22	-59.73	-106.82	690.20	30.84
24	217.05	655.78	104.54	81.03	170.65	900.39	40.23
25	217.05	472.00	234.86	174.15	332.29	1367.98	61.12
26	217.05	288.23	267.66	198.81	340.06	1426.36	63.73
27	217.05	104.35	277.03	204.03	314.57	1382.04	61.75
28	217.05	288.12	273.73	200.17	263.50	1309.30	58.50
29	217.05	638.74	132.30	93.48	216.21	997.02	44.55
30	217.05	802.53	-159.18	83.98	148.06	812.39	36.30
31	217.05	802.53	-188.23	64.71	148.06	803.66	35.91
32	217.05	789.30	17.83	-29.36	188.54	846.75	37.83
33	217.05	104.35	-9.33	35.59	159.62	338.43	15.12
34	217.05	140.52	47.39	-51.71	-61.44	180.88	8.08
35	217.05	248.88	69.80	-45.30	-76.80	264.86	11.83
36	217.05	288.12	-413.27	67.03	120.74	485.36	21.69
37	217.05	561.68	-212.71	34.54	-131.69	776.88	34.71
38	217.05	638.74	-605.76	184.02	122.99	822.04	36.73
39	217.05	703.89	-203.71	-1.91	-169.78	958.26	42.82
40	217.05	703.89	-221.37	-13.75	-169.78	993.63	44.40

41	217.05	555.75	3.71	92.05	65.88	622.29	27.80
42	217.05	789.30	416.37	289.06	-62.96	1364.28	60.96

Il cui valore massimo di 1426 daN/cm^2 è in linea con quello dell'esempio citato 1.42x 10^8 Nm^{-2}

654 G. Alfano *et al.*



Questo calcolo è inserito nel foglio elettronico excel Profilo chiuso1.xlsm.

Bibliografia

	Autori	Titolo	Anno
1	Franco Maceri	On the Torsion of thin - walled milticell sections	1967
2	Vincenzo Franciosi	Scienza delle Costruzioni Vol.II (Teoria della trave) Liguori editore, Napoli	1969
3	MARIO Paz, C. PATRICK STREHLS and PRESTON SCHRADER§ University of Louisville, Louisville, KY 40208, U.S.A.	COMPUTER DETERMINATION OF THE SHEAR CENTER OF OPEN AND CLOSED SECTIONS	1975
4	ALEXIS OSTAPENKO and YAOFENG CHEN - Lehight Univeristy Bethelem, Pennsylvania	EFFECT OF TORSION ON STRENGHT OF SHIP HULLS	1982
5	Aldo Zavelani Rossi	Esercizi di Scienza delle Costruzioni - Edizioni Clup	1983
6	CHAI Host YOO: Auburn University. Auburn. AL. U.S.A. and S.UIIK V. Acn.*i: P.O. Box 4980. Jeddah. Saudi Arabia	CROSS-SECTIONAL PROPERTIES OF THIN-WALLED MULTI-CELLULAR SECTION	1984
7	N. W. Murray Monash University	Introduction to the theory of thin -walled structures - Clarendon Press Oxford	1984
8	N. W. Murray and M. M. Attard	A Direct Method of Evaluating the Warping Properties of Thin-Walled Open and Closed Profiles	1987
9	C. S. GURUJEE and K. R. SHAH Department of Civil Engineering I.I.T., Powai, Bombay	A computer program for thin walled frame analysis	1989
10	Nicola Augenti	Intoduzione al calcolo delle strutture in parete sottile - Liguori Editore Napoli	1992
11	Thomas S.Z. Hu	CROSS SECTIONAL CONSTANTS AND STRESS DISTRIBUTIONS OF THIN-WALLED SECTIONS	1992
12	G. Alfano F. Marotti de Sciarra L. Rosati	Automatic Analysis of multicell thin-walled sections	1994
13	Walter D. Pilkey and Levent Kiti¸s Department of Mechanical Engineering University of Virginia Charlottesville, Virginia	Notes on the Linear Analysis of Thin-walled beams	1996
14	Aleksandar Prokic	Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open±closed section	1999
15	Missouri University of Science and Technology Scholars' Mine Chunting Xiang, Albert C.J. Lu0, Paul Seaburg and Robert Crain	On the Computation of the Cross-section Properties of Arbitrary Thin-walled Structures	2002
16	W. Wagner, F. Gruttmann - Universit¨at Karlsruhe (TH) Institut f¨ur Baustatik	A displacement method for the analysis of flexural shear stresses in thin–walled isotropic composite beams	2002
17	W. Wagner, F. Gruttmann - Universit¨at Karlsruhe (TH), Institut f¨ur Baustatik	A displacement method for the analysis of flexural shear stresses in thin–walled isotropic composite beams	2002
18	Katy Saadè - University Brussels	Adapting Prokic warping function for thin-walled beam analysis	2004
19	P.C.J. Hoogenboom and A. Borgart	Method for including restrained warping in traditional frame analyses	2005
20	Dung M. Lue*, Jui-Ling Liu and Ching-Hau Lin Department of Civil Engineering, National Chung-Hsing University, Taichung,Taiwan	Numerical Evaluation on Warping Constants of General Cold-Formed Steel Open Sections	2007
21	J. Loughlan, K.P. Chong	Thin-walled Structures	2009
22	A.Campanile, M. Mandarino, V. Piscopo	On the Exact Solution of Non-Uniform Torsion for Beams with Asymmetric Cross-Section	2009
23	T Firmandha and S Makmun and Siswanto, Biro Klasifikasi	Numerical evaluation of shear stress distribution on ship cross section part 1	2015
24	T Firmandha and S Makmun and Siswanto, Biro Klasifikasi	Numerical evaluation of shear stress distribution on ship cross section part 2	2015
25	GajananK.Choudhary,KaranM.Doshi	An algorithm for shear stress evaluationin ship hull girders	2015

Andrea Pocaterra

CALCOLO DELLE STRUTTURE IN PARETE SOTTILE

Manuale tecnico conoscitivo con fogli excel per il calcolo dei profili aperti e per il calcolo della torsione non uniforme lungo la trave

Non presente in questa sintesi nella letteratura tecnica nel campo dell'ingegneria strutturale, questo testo tratta del calcolo delle caratteristiche e delle tensioni nelle sezioni in parete sottile, costituite da un insieme di elementi assimilabili a rettangoli, quali ponti a cassoni, profili aperti e chiusi per traverse e montanti di tralicci metallici, paratie, lamiere ondulate, canali aerei di irrigazione oltre alle travi di suo comune.

Viene introdotta in maniera semplificata la problematica della torsione non uniforme e il suo impatto nell'incremento delle tensioni normali e tangenziali, quasi sempre omesso nelle relazioni di calcolo, che può portare una struttura a superare i limiti di resistenza ammessi dalle normative vigenti.

I file excel sono scaricabili dal sito darioflaccovio.it.

Andrea Pocaterra, dopo aver conseguito la maturità scientifica al liceo Scientifico Augusto Righi di Bologna, si è laureato in Ingegneria Civile sezione Edile all'Università di Bologna nel novembre del 1982 ed il conferimento all'abilitazione all'esercizio della professione nell'anno 1983.
Attualmente vive con la propria famiglia a Bologna dove svolge l'attività professionale e si occupa di calcolo strutturale. Nel corso della sua attività professionale oltre a varie progettazioni, direzione dei lavori e collaudi nel campo edile, ha nello specifico calcolato oltre un migliaio di incastellature metalliche per impianti ascensori sia con profili a caldo che a freddo per le ditte Kone, Otis, Schindler e vari committenti privati.

PROGETTAZIONE

9 788857 909660

DF 0966 € 29,00